[数学分析] 友好的 实分析导读 I

引言

这会是我将要开的数学分析系列第一篇，之后可能会另外搞一些数分下的其他内容例如复分析、泛函分析什么的，反正随缘吧，我一直挺随性的。

我的初衷是想写出对初学者而言更友好的文章，因此不会太想去着重于一些很玄很深奥的，或者真的很难的东西，毕竟从小听说这个名词可能都会有一种 “高级玩意儿” 的刻板印象，就像幼儿园时听说 “微积分” 感觉多高级一样。事实上，大部分人在实际学习后还是能顺其自然的接受，对于包括我在内的初学者而言最大的难点无非就是起步，我觉得身为自学者的我非常能感同身受在刚起步就去啃充满形式化语言的 “天书” 的痛苦。

> 人类能理解自然语言是一件很伟大的事，不用因为初学时对教材里的一大坨形式化语言感理解慢而感到困惑，谁都是这么过来的。

这篇文章的内容不是有针对性地解释某个相关著作的，有广泛的参考，内容核心是实分析本身，标题在意义上还是应该叫“导学”，但是如果涉及到水平本身恐怕就要叫随笔了（笑）但是这些词我想留着之后用。

实分析概论

实分析（Real Analysis）是一个很广义的概念，研究实数函数、数列的解析特性（例如数列极限、函数的微分和积分、各种性质）的就算实分析。关于 “实变函数论” 的定义，有些资料是直接将其与实分析划等号，或者单纯是各个学校课程/文献的使用名称不同，例如可能有两个学校的某课程名分别叫『*Theory of real variable functions*』和『*Real analysis*』，但内容是几乎一样的；或者有些学校会先学名为『实变函数』的课程再学『实分析』，它们有基础与推广的关系；甚至我看过一些研究生的数分课程就很直白地叫『*Analysis*』，从这方面看名字貌似不重要，事实确实是如此。

但是为了**避免读者浪费时间读他们不需要的东西**，我将要直接明了地先写清楚我将沿用的，对相关知识范畴的定义。

(以下内容可以忽略掉任何看不懂的数学名词，甚至直接跳到下一章正文)
(以下内容仅限于我的数学分析文章，基于我个人认知且仅作归纳作用，不主动否定任何其他观点和定义)

在对其进行区别的情况下，实变函数论属于实分析，是实分析中较为基础的部分。我们会在实变函数

讨论一些基础的东西例如欧氏空间上的测度、积分的构造和各种收敛，主要关注实数集上的函数，而在更广义的实分析中，包含这些内容同时还会进一步涉及到度量空间、拓扑空间等更一般的概念。在实变函数论中我们主要指 *Lebesgue* 测度空间，用 $\mathcal{M}$ 表示 *Lebesgue* 可测集合的 σ 代数， m 表示 *Lebesgue* 测度 而 $\mathbb{R}^n$ 表示实数空间，则我们用 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, m)$ 来表示，在这个范围内讨论实分析我一般就会称其为『实变函数论』。

但是要推广到实分析的范畴我们就不会再局限于 *Lebesgue* 测度，而是在一个由非空集合 X ， X 上的满足包含全集、封闭于补集的运算，且对可数并集封闭的 σ 代数的子集族 $\mathcal{F}$ 以及测度 μ 组成的测度空间 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 来讨论，我们会在这个范畴推广前者 *Lebesgue* 测度空间中除了 *Lusin* 以外的大部分定理。然后我们会在这个抽象的测度空间的基础上，讨论其积分等性质，有些测度我们还会在拓扑空间的基础上进一步讨论，例如学生们耳熟能详的 Borel 测度（不限于 $\mathbb{R}^n$ 的），还有一些涉及群论的东西像是 Haar 测度。

经过这一系列的积累后，恭喜你入门了。通过学习实分析，我们会更深入地理解一些高级的数学概念（这里指抽象程度上的高级），例如实数域上的积分，线性变换，卷积，*H-L* 极大函数，*Fourier* 变换，正则变换什么什么，就不一一列举了。你可能会发现，这些『高级概念』有的好像很熟悉的样子，实际上确实如此，但是以一个跟着一般课程大纲走的中学生的视角，你不会在对一个向量/矩阵进行线性变换时进行严格的数学证明或形式化的推导，我们要做的是从基础开始构建一个坚实的实分析体系，以为这些概念提供更为严密和深刻的数学基础。

另外，我非常推荐我当时的实分析入门作《陶哲轩实分析》，我觉得这是每个人（只要是有学数学这个学科的）都应该看的东西。这本书的做法是从最基础的自然数、加减乘除开始定义，因此我认识范围内都有不少人觉得前几章过于基础而忽略。而当我耐下性子把全书看完后，我可以很负责任地说，无论是已经有一定基础还是毫无基础的家伙，把这本书从头耐心地看完绝对不是一件浪费时间的事情。虽然但是，在那之后如果你有了一定的拓扑学基础，再看一遍会更好（我说的

但是就大部分主流的教育的大纲来说，一般我们也是能从更抽象的概念去理解一定的基础知识后再学数学分析，至少我没见过还没学加减法的婴儿先跑去学习如何构建实数公理系统再定义加减法。我个人总是把基础的数学知识和与之相关的实分析内容，理解为一种 “从抽象到具体” 的关系，尽管这个说法硬要说是不严谨的，但符合直觉。因此本文还是无法避免基础知识储备，我已经尽可能降低了本文对基础知识储备的要求，所以我只认为读者需要这些就能畅通无阻地阅读了：

- 初中水平的数学常识（不要求解题技巧）
- 集合论的基础概念，能理解概念和简单的符号即可
- 基础的逻辑符号概念，一边看一边查也不是不行
- 微积分学的基础概念（极限、导数、积分的基础概念，不要求解题技巧）

都那么简单了，还有什么值得犹豫的，快点学！

实数与基础概念

实数公理系统

为了确保数学体系的严密性、一致性和准确性，我们需要在文章的开始先明确定义实数的基本性质并建立一套公理体系，以进行后续更为系统和严密的推导和证明。大部分系统性的实分析书籍/文章都会做这件事，所以这看起来更像只是我重新说一遍的废话，反正，理解就对了。

$\mathbb{R}$ 是实数集合，我们使用 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 来表示实数集 $\mathbb{R}$ 的笛卡尔积，即对于所有实数 x, y，由形式为 (x, y) 的有序对组成的集合。我们在这之上定义两种运算，考虑在集合中的元素 x, y ，我们则能定义：

- $+$ (Plus)：$\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},(x,y)\mapsto x+y$
- $\cdot$ (Multiply)： $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},(x,y)\mapsto x\cdot y$

于是在域 $(\mathbb{R},+,\cdot)$ 中，我们考虑 $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$，有：

- 加法/乘法结合律：$x+(y+z)=(x+y)+z,x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$
- 加法/乘法交换律：$x+y=y+x,x\cdot y=y\cdot x$
- 乘法分配律：$x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$
- 加法单位元：$x+0=x$
- 乘法单位元：$x\cdot 1=x$
- 加法逆元：$\exists -x\in\mathbb{R},x+(-x)=0$
- 乘法逆元：$x\neq 0,\exists x^{-1}\in\mathbb{R},x\cdot x^{-1}=1$

我们定义了实数集合上的加法和乘法运算的基本性质，这一系列公理我们称其为『域公理』，但是这还不够，我们知道实数域是一个有序域，因此我们还需要定义一个线性顺序 $\leq$ 满足 $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$：

- 反对称性：若 $x\leq y$ 且 $y\leq x$，则 $x=y$
- 传递性：若 $x\leq y$ 且 $y\leq z$，则 $x\leq z$
- 完全性：有且仅有 $x\leq y$ 和 $y\leq x$ 的情况
- 自反性：$x\leq x$

但是即便这样，我们定义出来的这坨东西也只能说是有理数 $\mathbb{Q}$ ，其定义是可以表示为两个整数之比的数，不包括例如 $\sqrt{2}$ 之类的无理数，从数轴来说，它是有间隙的。而实数是实数轴上所有点的集合，包括了有理数和无理数，于是我们还需要进一步的定义。

Dedekind 切割

于是我们要使实数具有完备性，比较有名的就例如 *Richard Dedekind* 切割原理，既然要使其『不存在缝隙』，那就应该是对于 $\mathbb{R}$ 的任何一个切割都是有一个分点确定的，有了直观的理解定义起来就很容易了。

对于任何非空的、有上界的实数集合 S，存在一个实数 α，使得 $\forall x \in S$，都有 $x \leq \alpha$。这个 α 被称为 S 的上确界，也叫做最小上界。

将 $\mathbb{R}$ 任意分成两个非空的，不相交的子集 A, B，分别是左侧子集和右侧子集，使得任意实数 α 能是左侧子集 A 的上确界或者右侧子集 B 的下确界，即 $\forall x \in A, y \in B, x \leq \alpha < y \text{ or } x < \alpha \leq y$，也就是对于实数域的任何一个切割 $A|B$ 都总有一个实数 α 与之对应即可。这样做，我们就能确保每个戴德金切割都对应一个实数，实数集合就没有在数轴上的没定义的地方。

证明

我们证明戴德金切割的存在，应当三种情况讨论。我们统一设 A 有上确界 α, B 有下确界 β

第一种是 A 有最大值，当 $\alpha \in A$ 时，必定 $\forall x \in A, x \leq \alpha$，又因为 $\forall x \in A, y \in B, x \leq \alpha < y$，所以切割点取 α 即可。同理地，第二种是 B 有最小值， $\alpha \in B$ 的话， $\forall x \in A, y \in B, x < \alpha \leq y$，我们切割点取 β 即可。

剩下的情况是，如果 $\alpha \notin A$ 且 $\beta \notin B$ ，则只能 $\beta \in A$，又 $\alpha \in B$，在这样的条件下会有 $\beta < \alpha$。但是从另一方面考虑，因为 α 是 A 的上确界且 $\beta < \alpha$，所以应该至少有一个 $x \in A$ 满足 $\beta < x$。与此同时，由于 β 是 B 的下确界，存在 $y \in B$ 满足 $\beta \leq y < x$。这与我们一开始的要求实数集满足的条件相矛盾：

$$\forall x \in A, y \in B, x \leq \alpha < y \text{ or } x < \alpha \leq y$$

因此不存在一个同时不属于 A, B 的数在实数集。

实数域作为一个度量空间，我们可以通过戴德金切割等方法来证明其完备性，类似地，我们也可以用这些方法去证明其他度量空间的完备性，而方法也是很多的，本章会把内容推广到度量空间来讨论其完备性。尽管这稍微有点超纲，部分内容可能会暂时地脱离实分析而到更侧重于泛函分析方面的内容。但我觉得读者理解这些是很有用的，因为在后期我们可能还会涉及更一般的空间和拓扑结构，趁早把这些搞清楚是好事（

度量空间

『度量』和『度量空间（Metric space）』无非就是我们从小学去学简单的平面几何就开始接触的数学概念，但是一个普通的小朋友在那个阶段往往都是用一种很直观的方式来理解的，其理解未必严谨。老师在小学时告诉我们在欧几里德空间中，两点之间的距离直线最短，然后我们就能用一把尺子来量出两个点之间的距离，当我们选择了这么一个测距工具的度量后，这整个空间就是一个度量空间，我们可以在上面研究各种距离关系。

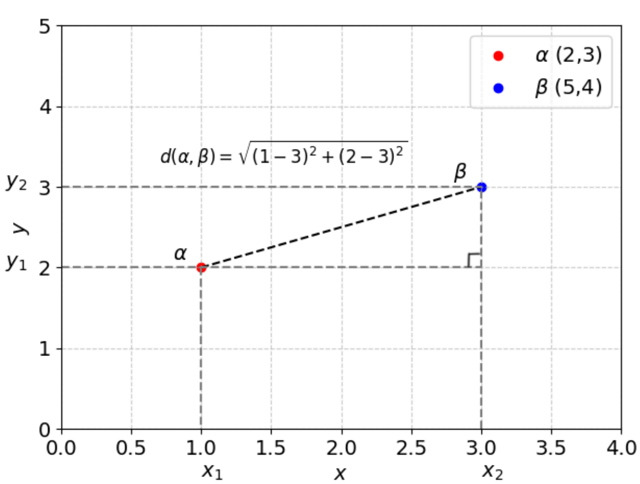
因此我们要在意的就是这个『度量』的本质，度量空间一个非空集合 X，我们称之为点集。配备一个度量函数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$，满足

- 非负性：$\forall x, y \in X, d(x, y) \leq 0$ 且等号成立当且仅当 $x = y$
- 对称性：$\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$
- 三角不等式：$\forall x, y, z \in X d(x, z) \leq d(x, y) + d(t, z)$

这样的度量函数衡量了空间中两点之间的距离，使得我们可以讨论空间中点的接近程度和收敛性等概念，然后我们就能用一个有序对 (X, d) 表示这个度量空间。就以我们从小玩到大的欧几里德空间为例，在欧氏空间中集合通常是 n 维实数向量的集合，用 $\mathbb{R}^n$ 表示，于是每个点都可以用 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示。

于是当我们分别有两个点，$\alpha = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $\beta = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 时，欧几里德空间的距离函数 d 为

$$d(\alpha, \beta) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$



简单的说就是勾股定理，例如在二维欧几里得空间中的两个点。

极限与收敛

我们说一个序列是收敛的，意味着随着序列的项越来越靠近某个特定的值。

严谨地说，一个数列可以看作是从一个自然数（或它的子集）集合到实数集合的映射，当我们用 $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ 表示一组有顺序的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 并将它称为数列时，其本质就是一个映射：

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ n \mapsto f(n) = a_n$$

而当我们谈论数列的极限时，我们关注的是数列中的数字随着项数的增加而趋于的特定值。但是这种直观的说法很显然没法严密地定义极限，而微积分学的基础都建立在这之上，如果从这里的结论就开始因为不严谨而不可靠，微积分就会变成一种仅仅直观的形式上的变换，因此早期的数学家们开始追求一个能严密化极限概念的东西。

考虑一个正实数 ϵ，对于数列 $\{a_n\}$，若存在 $L \in \mathbb{R}$，对于任意正实数 ϵ，存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时，$|a_n - L| < \epsilon$ 成立，则称数列 $\{a_n\}$ 的极限为 L，当极限存在时，我们称这个数列是收敛的，当 $n \to \infty$ 时，记作 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$
其中，ϵ 是接近极限要求的精度，我们希望数列中的项与极限的距离都小于这个精度，而总存在一个 N 使得数列的第 N 项开始，数列的每个数和极限的误差都不超过 ϵ，意味着该项趋近于极限已经达到了要求的精度。直观来说，我们会默认 ϵ 是一个较小的数，而 N 是一个较大的数。这种严谨的定义极限的方式叫做『$\epsilon - N$ 语言』，我们可以用如下的定义来表示一个当 $n \to \infty$ 时的数列 $\{a_n\}$ 趋向于极限 L:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ \left[n > N_\epsilon \implies |a_n - L| < \epsilon \right]$$

我们常听说的柯西列，即满足柯西条件的数列，在度量空间中，考虑正实数 ϵ，若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\forall m, n > N$，有 $|a_m - a_n| < \epsilon$，则我们称这个数列是柯西列。在实数空间中，任何柯西列总是收敛在实数域内的，因此我们会称实数空间是一个完备度量空间，从柯西条件的角度来谈度量空间的完备性，如果一个度量空间中的任何柯西列都收敛在该空间之内，那么这是一个完备度量空间。任何一个在欧几里德空间 $\mathbb{R}^n$ 中闭合且有界的子集，我们称其是一个紧空间（Compact space），任何紧空间都是完备的。

为了之后方便地表示，此处我们定义一个函数

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \ n \mapsto d(n, m) = |a_n - a_m|$$

性质：$\mathbb{R}$ 上的柯西列都有边界

证明

根据柯西列定义我们知道，考虑柯西列 $\{a_n\}$，考虑一个正实数 ϵ 则会有一个对应的正整数 N，使得 $\forall m, n > N$，有 $d(m, n) < \epsilon$，于是我们可以取

$$r = \max\{\epsilon, d(a_1, a_{N+1}), d(a_2, a_{N+1}), \cdots, d(a_N, a_{N+1})\}$$

由于我们取的 r 是所有可能的距离的最大值，所以 $\forall n > N$ 都成立 $d(a_n, a_{N+1}) < \epsilon$。对于所有

$n \le i \le N$，有 $d(a_i, a_{N+1}) \le r$

以 a_{N+1} 为球心，r 为半径，则整个柯西列都被包含在一个有限半径的开球内，则：

$$B_r(a_{N+1}) = \{x \in \mathbb{R} | d(x, a_{N+1}) < r\}$$

这个开球包括了所有与 a_{N+1} 距离小于 r 的实数，构成了柯西列的有界范围

另外，如上所示后面我们都默认会特别定义两个元素的距离，因为如果直接使用绝对值 $|a_n - a_m|$ 可能会妨碍到我们之后把柯西列的性质推广到更一般的度量空间。

常见代数结构

代数结构是一种数学对象，它包括一组集合及其上的一些运算，这些运算满足一定的性质。这在普适代数学中是很重要的概念，后面我们的很多讨论都会涉及到，因而直接突然插进来讲，至少大概让读者知道一些较为简单和基础的代数结构。

抽象代数这个话题我之后会专门写文章讨论，这里仅提出本文会用到的基本概念。

群

群（Group）是一个配备了二元运算的集合的代数结构，其二元运算有结合律、单位元和逆元素，是一种很简单的代数结构。考虑一个集合 G，用 $\cdot$ 表示其二元运算，两个元素 x, y 结合成属于 G 的元素记为 $x \cdot y$，对于所有 $x, y, z \in G$，满足：

- 封闭性：$a \cdot b \in G$
- 结合律：$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
- 幺元：G 中存在 e 使得 $xe = ex = x$ 成立
- 逆元：x 有逆元 $x^{-1} \in G$，满足 $xx^{-1} = x^{-1}x = e$

则我们说 $(G, \cdot)$ 是一个群。这很简单，但有一些比较重要的结论我们应该知道，首先这个幺元是唯一的，其次，每个元素的逆元是唯一的，元素对于它的逆元而言也是逆元。

以及还有一些不同情况的类似于群的结构，也可能是特殊的群，后面有可能会用到也记一下。如果这个 R 满足上述性质中的封闭性和结合律，则是一个半群（Semigroup）；如果半群满足单位元性质，则是一个幺半群（Monoid）；若群满足交换律 $\forall x, y \in G$，$x \cdot y = y \cdot x$，则是一个阿贝尔群（Abelian group）或叫交换群；只有一个元素的群叫做平凡群（Trivial group），每个群都包含一

个平凡群。

环

环（Ring）是一种比群更为复杂的代数结构，它的集合配备了两种二元运算 $+, \cdot$，我们称之为加和乘（但这与我们数值的一般四则运算的加法和乘法不同），我们考虑集合 R， R 和 $+$ 组成的 $(R, +)$ 满足阿贝尔群的性质，其单位元表示为0，元素 x的逆元表示为 $-x$，我们称之为加法群。并且：

- $(R, \cdot)$ 是半群。
- $\cdot$ 对 $+$ 满足分配律，即 $\forall x, y, z \in R$，等式成立：
  - $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$
  - $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$

则我们称 $(R, +, \cdot)$ 是一个环。
如果 R 上的乘法满足交换律，则这是一个交换环（Commutative ring）；如果 R 上的乘法存在成其单位元，表示为1，则这是一个幺环（Unital ring）；如果幺环的 R 中的所有非 0 元素 x 存在其乘法逆元 x^{-1}，则 R 是除环（Division ring）。

当 $R = \{0\}$ 时，这个0同时是加法和乘法的单位元，这个环被称作零环。另外，从整数开始的什么 $\mathbb{Z}\mathbb{Q}\mathbb{R}\mathbb{C}$ 都关于数的加法和乘法构成一交换环。

域

域（Field）的结构和环相同，也是一个集合和两个二元运算，但它的性质更强，同时满足交换环和除环的性质，说白了就是四则运算加减乘除的推广。

> 更多文献使用 K 来命名这个作为域的集合，来自域的德语 Körper ，可能是Field容易冲突还是什么历史原因吧，我就这么用了，不想太多了。

考虑集合 K，其二元运算 $+, \cdot$ 并满足：

- $(K, +)$ 是阿贝尔群，其单位元为 0
- $(K \backslash \{0\}, \cdot)$ 是阿贝尔群
- $\cdot$ 对 $+$ 满足分配律

则我们称 $(K, +, \cdot)$ 是一个域。我们常说的有理数域、实数域还有复数域，就很明确了（之后就不会

把这些词用混了）。

测度论入门

测度论概述

说到要衡量集合的大小，数学学习进度在初中水平或以下的读者会先想到集合元素的个数，也就是基数（Cardinality），对于可数集而言是很简单的概念，但在很多情况下这行不通，就例如我们知道实数轴上任何一个区间的取点可以是无限个，另外还有维度的问题，因此我们要考虑一种更严谨高级的描述方法。
我们知道，一般而言我们的积分等操作都是在区间上进行的，而区间的表示形式一般是集合，而为了能将其推广到更一般的集合上，测度的概念就发展了出来。直观地说，测度是用来度量集合的大小或长度的数学概念，而这个大小一般会用一个非负实数来表示，因此测度论可以看作是实分析的一部分。从实分析的意义来出发，测度论为实分析提供了一种更一般的处理集合大小的方式，引入了抽象测度空间的概念。

另外，你应该知道的是测度论在概率论中也有很重要的地位，当我们需要关注一个事件发生的概率时，我们需要以一种抽象的方式理解这个“事件的整体”才能理解其概率，而测度论就会为我们提供一个十分明确的“概率测度”来在关注事件本身的前提下度量其发生概率。

测度空间与 σ-*algebra*

在说测度和测度空间的定义之前，我们最好先对 σ 代数（西格玛代数/西格玛域）有基本的认识。本质上而言，σ 代数是一个具备一定性质的集族，我们用 $\mathcal{P}(X)$ 来表示对于集合 X 所有子集所构成的集合，称其为 X 的幂集，另外一种表示方法是 2^X，定义为:

$$\mathcal{P}(X) = 2^X = \{A|A \subseteq X\}$$

给定非空集合 X，有 $\mathcal{P}(X)$ 的子集 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$，$\mathcal{F}$ 这里是一个子集族，满足:

- $X \in \mathcal{F}$
- 若 $A \in \mathcal{F}$，则 $X \backslash A \in \mathcal{F}$，即 $\mathcal{F}$ 中的每个集合，其补集也必须在 $\mathcal{F}$ 中。
- 若可数个集合 $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$，即 $\mathcal{F}$ 对可数个集合的并集封闭。

则我们称 $\mathcal{F}$ 是一个 σ 代数。补充一点可能与其他文献写法有差别的，我并没有直接提及但还是应该强调的是，σ 代数包含了空集$\varnothing$，因为 $X \in \mathcal{F}$ ，而当 $A = X$ 时， $X \backslash A = X \backslash X = \varnothing \in \mathcal{F}$。因

此集合 X 上最小的 σ 代数是 $\{\varnothing, X\}$，最一般的 σ 代数是 $\mathcal{P}(X)$。

引入 σ 代数后，我们就能定义一个包含 σ 代数的集合空间叫做可测空间，表示为 $(X, \mathcal{F})$，而对于所有的 $A \in \mathcal{F}$ ，我们称其为可测集合。这还不是一个测度空间，这里我们要区分，测度空间还需要一个测度函数，定义为：

$$\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$$

这个函数的作用是将作为 σ 代数的 $\mathcal{F}$ 映射到非负实数以满足测度空间的性质，于是一个测度空间可以表示为 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ ，一个测度空间具有以下两种重要性质：

- 空集测度为零： $\mu(\varnothing) = 0$
- 具有可数可加性，对于不交的可数个集合 $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$，则有 $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

在一般的测度空间中零测集的子集未必可测，这经常是一个大麻烦，所以在此基础上，如果测度空间 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 满足 μ 得到的任意零测集的子集仍然是 $\mathcal{F}$ 的元素，那我们说这是一个完全测度空间。

Borel集

我们在现阶段还没有讨论到“拓扑空间”的概念，此处涉及拓扑空间的概念容易让读者不理解，因此此处Borel集的一般定义混个眼熟就行（后面会再次提及Borel集在 $\mathbb{R}^n$ 相关的定义）

考虑拓扑空间 (X, τ)，则拓扑 τ 的最小的σ-代数我们称之为 X 的 Borel σ代数（也能直接叫Borel代数），记为 $\mathcal{B}(X)$，我们把Borel代数中的元素称为 X 上的Borel集。Borel集是对对取补集和可数并集封闭的，即：

- 取补集的封闭性：$E \in \mathcal{B}(X) \Longleftrightarrow E^c \in \mathcal{B}(X)$
- 可数并集的封闭性：有可数个序列 $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{B}(X)$，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}(X)$

拓扑结构的基本元素就是开集，Borel集是最小的**包含所有开集的** σ 代数，定义在Borel集上的测度都可以叫Borel测度。值得注意的是Borel通常是不完备的，在一般的度量空间中，Borel σ-代数不一定包含所有零测集的子集。

外测度与构造

存在一些集合是不可测度的，它们不适合标准的测度意义，对于非可测度集合，外测度的引入允许我们在更广泛的集合类别上进行测度论的研究，再通过适当的构造，可以将外测度拓展为可测度测度，

从而更好地描述集合的性质。这是一个很重要的概念。

考虑集合 X 和集合族 $\mathcal{F} = 2^X$，映射到 $[0, \infty]$ 的函数 μ^*:

$$\mu^* : \mathcal{F} \to [0, \infty]$$

同样地，空集合的外测度为零，即 $\mu^*(\varnothing) = 0$，以及满足特殊性质:

- 单调性：如果 $A \subseteq B$，则有 $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$
- 次可加性：对于 X 的任意子集序列 A_i，满足 $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$

则我们称 μ^* 是定义在集合族 $\mathcal{F}$ 上的外测度。
从这些性质我们也能得到一些结论，外测度是非负的，即 $\forall E \in \mathcal{F}$，满足 $\mu^*(E) \ge 0$。

在构造外测度时，我们要考虑的是如何对于所有可能的覆盖中，取所有估计的下确界，以确保外测度广义上是“最小测度”。
我们考虑一个可测集合 X 的外测度 μ^* ，$\mathcal{E}$ 是 X 包含空集的子集族，是所有可能的集合覆盖 $A_1, A_2, \cdots$ 的测度之下确界，并用 $\mu(A_k)$ 表示 A_k 的测度，于是 $\forall E \subseteq X$，其外测度定义为:

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) | E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, A_k \in \mathcal{E} \right\}$$

可以比较直观地理解为，如果用『范围』来形容集合的大小，就是我们从一个用若干个小的范围组成一个更大的范围（即对于集合而言的“外部”），这个范围覆盖了集合可能在的所有地方，再收缩（指取下确界）到能覆盖这个集合最小的范围。

这种情况下，根据下确界的定义，给定 $\epsilon > 0$，可数个集合 A_k 满足了 $E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$，有:

$$\mu^*(E) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \le \mu^*(E) + \epsilon$$

Carathéodory 扩张定理

强调一下，单看上面我们对外测度的定义可以得知，外测度未必是符合要求的测度。在测度论中有一个很著名的定理叫做Carathéodory 扩张定理，它描述了如何从一个外测度扩展到一个完备的测度空间。

> 我口头习惯了称 Carathéodory 延拓定理，应该也是没问题的（好像也有文献这么称，真不行就直接

> Carathéodory's extension theorem 吧 严谨一点错不了的（

对 Carathéodory 扩张定理有很多种方向不同但意思一样的陈述，说个比较直白的。我们可以在原始的可测集合族上构造一个完备的测度空间，使得测度的定义在更一般的集合系统上成立，同时保持了外测度的性质。
考虑可测 X 与其外测度 μ^*，如果 $\forall A \subseteq X$ 都有：

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

则我们称 E 是可测集，其中 E^c 是 E 的补集，此时 $\mu^*(E) = \mu(E)$。然后我们考虑一个 $\mathcal{M}$ 是 X 中的可测集的全体，使其构成一个σ代数，即：

$$\mathcal{M} = \{E \subseteq X | \forall A \subseteq X, \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)\}$$

这个集合 $\mathcal{M}$ 已经满足 σ代数的性质。

证明

在本节定义中需要证明的条件
给定非空集合 X，若 $\mathcal{M}$ 满足以下条件，则称 $\mathcal{M}$ 是集合 X 上的 σ 代数：

1. $X \in \mathcal{M}$
2. 若 $A \in \mathcal{M}$，则 $X \backslash A \in \mathcal{M}$，等价于 $A^c \in \mathcal{M}$
3. 有可数个序列 $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{M}$，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$

首先，我们知道 μ^* 是 X 上的外测度，那么我们已经有：

- $\mu^*(\varnothing) = 0$
- 如果 $\mu^*(A) \subseteq \mu^*(B)$，则有 $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
- 对于 X 的任意子集序列 A_i，有 $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$

(1) X 本身是可测的，显然就会包括在 $X \in \mathcal{M}$，满足 $X \in \mathcal{M}$

(2) 当 $E \in \mathcal{M}$ 时， E 是可测的，根据可测集的性质可知 E 的补集 E^c 也是可测的，所以显然：

$$E \in \mathcal{M} \Longleftrightarrow E^c \in \mathcal{M}$$

(3) 当可数的 $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{M}$ 时，其中任意 A_i 是可测的，这意味着无限也可以，只要是可数的。

所以我们就先挑出两个 $M, N \in \mathcal{M}$ 来证 $\mathcal{M}$ **对可数有限个集合的并集是封闭的**，这并不全面但比较简单，先这么证。先写出来，我们考虑 $E \subseteq X$，则需要证明：

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap (M \cup N)) + \mu^*(E \cap (M \cup N)^c)$$

因为 M 和 N 都可测，所以我们推导：

$$\begin{aligned}
&\mu^*(E \cap (M \cup N)) + \mu^*(E \cap (M \cup N)^c) \\
&= \mu^*(E \cap M) + \mu^*(E \cap N \cap M^c) + \mu^*(E \cap (M \cup N)^c) \\
&= \mu^*(E \cap M) + \mu^*(E \cap N \cap M^c) + \mu^*(E \cap M^c \cap N^c) \\
&= \mu^*(E \cap M) + \mu^*(E \cap M^c) \\
&= \mu^*(E)
\end{aligned}$$

现在我们证出了 $\mathcal{M}$ 对有限集的并集的封闭性，但这还不够，我们得证明可数的情况。
考虑正整数 n 和可数个可测集合 $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{M}$，定义集合 $E_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$，$E_n$ 本身是递增的（$E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$），由于外测度的次可加性，我们可以得出：

$$\mu^*(E_n) = \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A_i)$$

我们可以考虑极限情况：

$$E = \lim_{n \to \infty} E_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

$$\mu^*(E) = \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

通过取 n 趋向于无穷，得到了 $\mu^*(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$。这个过程类似于利用极限过程证明可测集的性质，从有限个集合的情况推广到可数个集合的情况，我们便可得出 $\mathcal{M}$ 对可数集的并集封闭，于是 $\mathcal{M}$ 是σ代数。

现在，我们已有外测度 μ^*，我们希望找到一个测度函数 μ，使得对于任意可测集合 $E \in \mathcal{M}$，有 $\mu(E) = \mu^*(E)$，我们可以考虑将外测度 μ^* 限制在可测集合 $\mathcal{M}$ 上，自然地引入一个测度函数 $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$，我们就构造出了一个测度空间 $(X, \mathcal{M}, \mu)$。

度量外测度

> 有直接提及这个名词的网络文章并不多，这个词叫 Metric outer measure，在 metric space 中定义的外测度，所以就猜测这个应该叫度量外测度，我相信这个猜测是合理的。
>
> 在哪里有见过一篇网络文章提供的 *Foundations of Modern Analysis* 的中文翻译目录是有这么称的（原书对应 *Chapter 1.8: Metric Outer Measure*）。
> 顺带一提，早期看阳明交大的吴培元老师的实录课《实变函数》用的就是这份教材，很值得推荐给刚入门的读者去看（个人觉得可接受度很高）

度量外测度是在度量空间中引入的测度概念，意思就是相比之下外测度是一个更一般的概念，可以在任意集合族上定义，而度量外测度是在度量空间上定义的外测度，通常使用集合的直径度量大小。

考虑度量空间 (X, d)，就像之前那样，X 是集合，$d : X \times X \to \mathbb{R}$ 是度量函数。考虑一族开球 $\{B\}$，其中每个开球 B_k 都在该度量空间里面，由一个中心 x_k 和半径 r_k组成，定义为：

$$B_k(x_k, r_k) = \{\alpha \in X : d(\alpha, x_k) < r_k\}$$

然后我用 $\mathcal{D}(B_k)$ 来表示开球 B_k 的直径，之后也会沿用这种记法不再特别强调。一个开球 B_k 的直径，我们会取其包含的点之间的最大距离，即：

$$\mathcal{D}(B_k) = \sup\{d(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in B_k\}$$

我们定义 $E \subseteq X$ 的度量外测度为：

$$\psi(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{D}(B_k) | E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right\}$$

在所有可能的开球覆盖 E，即 $E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ 的情况下，度量外测度是所有这些开球的直径之上的下确界。开球是度量空间中基本的开集，因此本质上而言和之前的构造方式是一样的，只是表示方式变了而已，就例如在一维空间中，开球退化成一条线，也就是符合直觉的区间，当半径为0时，就退化成一个点。

度量外测度具有一般外测度的性质，另外还有一些特殊性质。

- 若点集 $E_1, E_2 \in X$ 的距离 $d(E_1, E_2) > 0$，则 $\psi(E_1 \cup E_2) = \psi(E_1) + \psi(E_2)$

此处说，我们之后会称这种两个距离大于零的集合为正分离集合（Positively separated sets），或者说它们是正分离的。对此很直觉的解释是，两个不相交的集合的并集的外测度等于各自外测度的和。

> 这里我并不确定它确切的中文叫法，因为只有英文wiki，我直接搜索我的翻译方式是搜不到的，如果它有更广为人知的中文名词欢迎读者指正。
>
> Wiki(Positively separated sets): https://en.wikipedia.org/wiki/Positively_separated_sets

- 对 $A_n \in X$，定义 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$，且使 A_n 与 A_{n+1} 正分离，则有：

$$\psi(A) = \sup \psi(A_n)$$

在一些情况下，通过逐渐增大并正分离的集合序列，整个集合的测度会趋向于序列中任意集合的测度的最小上界，阿就理解为测度在逐渐扩展的集合序列上的极限行为吧。（Wiki对此性质解释不多）

- 有集合 $A \subseteq B$，B 是开集，若 $\psi(A) < \infty$，考虑正整数 n 使：

$$A_n = \{x \in A : d(x, B^c) \geq \frac{1}{n}\}$$

则有：

$$\lim_{n \to \infty} \psi(A) = \psi(A^n)$$

> 这个性质的 Proff 在 *Foundations of Modern Analysis* 中是很简明的 ~~我的猫都看得懂~~，我重复一遍没有意义，文末会放具体页码的引用。
> 以及这个性质在书中也被简明地用来证明下面的定理 (1)

- (1) 在度量外测度中，任何闭集都是可测的。
- (2) 在度量外测度中，任何Borel集都是可测的。

Lebesgue测度

是时候话题扯会实数域了，如果前面你大概看完我的废话，那你应该能对测度有点概念了。Lebesgue测度是欧氏空间上的标准测度，在有限维的欧氏空间中就是我们所谓“长度”“面积”“体积”等概念（甚至更高维）

现实没那么美好，拿严格的Lebesgue可测集来说，它是在特定的可测集合类上定义的，而对于一些不可测的集合来说，这一概念就无法适用。因此就如我们前面对外测度的描述那样，为了使我们构建出来的Lebesgue测度能更一般，我们得先构建出一个Lebesgue外测度，再像之前所说的“收缩”那样构造出一个能在更广泛的集合上进行定义的Lebesgue测度。

在我们从小就开始学的一维欧氏空间，即 $\mathbb{R}$ 中，我们有熟知的“区间”的概念，而比如一个开区间可以表示为 $I=(a,b)$，这种时候我们都知道，我们可以其长度为 $\ell(I)=b-a$ ，我们也容许 $\ell(I)=+\infty$，这很直观。但我们正在面对的是 n 维的欧氏空间，即 $\mathbb{R}^n$，在更高维度的情况下我们就不能称区间，而是用矩体（Rectangle）来表示在空间中的区域，一个开矩体，即空间中的开区域，由 n 个区间的笛卡尔积组成：

$$R=I_1\times I_2\times\cdots\times I_n=(a,b)\times(a_1,b_1)\times\cdots\times(a_n,b_n)\subseteq\mathbb{R}^n$$

在一维情况我们已经有了区间的测度，也就是所谓长度 $\ell(I)=b-a$，所以我们只需要将其拓展到高维即可表示开矩体的测度：

$$\lambda(R)=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$$

于是我们就能为点集 $E\subseteq\mathbb{R}^n$ 定义其外测度，考虑一列开矩体 $\{R\}$，则有外测度（注意，我们的 R 本身就是在实数域考虑的，所以不用限制了）：

$$m^*(E)=\inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(R_k):E\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}R_k\right\}$$

此时我们称 $\{R\}$ 是 E 的一个L-覆盖，很简单，意思就是这组开矩形集合的元素的并包含了 E，即 $E\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}R_k$，此时我们有一个 $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(R_k)\in\mathbb{R}$，即是覆盖的测度。和之前我们对外测度的定义同理，由于下确界的定义，对于任意的 $\epsilon>0$，我们有：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(R_k)<m^*(E)+\epsilon$$

意思就是，取下确界是为了确保我们的近似测度不会超过实际的外测度 $m^(E)$，通过引入一个任意小的正数 ϵ 来确保我们的近似不会过于偏离实际测度。

回顾上一节的 Carathéodory 延拓定理所说的条件，考虑集合 $A\subseteq\mathbb{R}$，满足：

$$m^*(A)=m^*(A\cap E)+m(A\cap E^c)$$

则我们称 E 是Lebesgue可测集，就像之前说的，这些可测集构成的集合是一个σ代数，对于任何Lebesgue可测集 E, 其Lebesgue测度定义为 $m(E)=m^*(E)$，这里都和前面同理就不多说了。

线性变换性质

关于Lebesgue测度的性质，我没必要在这里把所有性质都又臭又长地列一遍，wiki已经写的很全面了：

> Wiki(Outer measure): https://en.wikipedia.org/wiki/Outer_measure

单独地说，Lebesgue测度有两个很重要的性质：

- 可平移性：平移集合不会改变其可测性，考虑Lebesgue可测集 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 中的点按向量 $\mathbf{x}$ 平移，表示为 $E+\mathbf{x}=\{a+\mathbf{x}: a \in E\}$ ，则满足 $m(E+\mathbf{x})=m(E)$
- 可缩放性：平移集合不会改变其可测性，考虑Lebesgue可测集 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 中的点按缩放因子 $c>0$ 进行缩放，表示为 $cE=\{ca: a \in E\}$，则满足 $m(cE)=c^n m(E)$

这两个性质都让人容易想到线性变换，我们确实也能直接用一般的线性变换来总结性质。考虑线性变换 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 和Lebesgue可测集 $E \subseteq \mathbb{R}^n$，则 $T(E)$ 也是Lebesgue可测集，并满足：

$$m(T(E))=|\det(T)| \cdot m(E)$$

* 此处 $|\det(T)|$ 表示的是行列式的绝对值开集 $\mathcal{O}$

$\mathbb{R}^n$ 与 Borel集

Lebesgue外测度是度量外测度, 因此 $\mathbb{R}^n$ 中的所有Borel集都是Lebesgue可测的。反过来说，Borel可测集是由所有开集生成的最小的σ代数，通常是不完备的，而Lebesgue可测集是由所有开集和零测集生成的σ代数，也可以Lebesgue可测集是完备的Borel集。

Borel集在外测度的——下是具有正则性的，指的是Borel集通过开集/闭集逼近其内部/外部，因此这也分为内正则性和外正则性。

- 内正则性：考虑Borel可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$，存在一个开集 $\mathcal{O}$ 使得 $E \subseteq \mathcal{O}$ 且 $m(\mathcal{O} \backslash E)$ 可以任意小。这意味着我们可以通过这个开集 $\mathcal{O}$ 逼近 E 的内部。
- 外正则性：考虑Borel可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$，存在一个闭集 $\mathcal{C}$ 使得 $\mathcal{C} \subseteq E$ 且 $m(E \backslash \mathcal{C})$ 可以任意小。这意味着我们可以通过这个开集 $\mathcal{C}$ 逼近 E 的外部。

Borel集被认为是“良好的集合”的代表，$\mathbb{R}^n$ 以及其中的开集、闭集、空集和可数个开集交、可数个闭集并也是Borel集，Borel集的交并补都是Borel集，Borel集的上下限集也是Borel集。

作为反过来说明Lebesgue测度是Borel的完备，提一个很奇特的例子是康托尔集（Cantor set），康

托尔集是Borel可测的，因为它是由有限次的闭集取交和取补操作构造的，但是存在康托尔集的子集，这些子集既是可测的，又不属于Borel代数。而它在勒贝格测度下是零，是可测的，这意味着勒贝格测度可以扩展到Borel代数之外的集合...不过这个东西我更想之后写抽象空间再写，或者单独写个短篇。

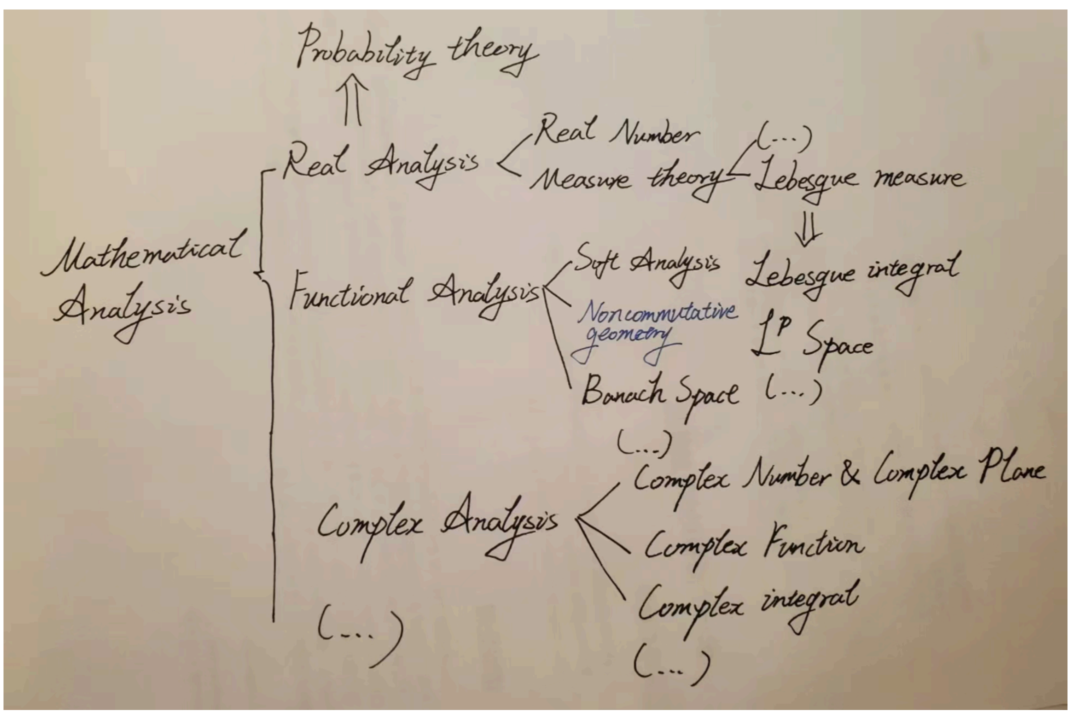
Next & 一些琐事

经历了一场并不精彩的初三期末区统考和零零散散的琐事，还病了一段时间，这几个晚上用零散的时间缝缝补补也算是草草给第一篇结个尾。

先说正经的，其实我对这篇文章是非常意犹未尽的，但看着已经屯下来的9k字又暂时没精力写挺难受的，就想着先发出来再说。其实有很多地方我想写更详细的证明和解释，但我不想再堆它半个月再写再发，所以这篇 “友好的实分析导读 I” 我应该会之后有空发更新版（仅针对I），或者单独发一个PDF写证明。

我仍然是充满动力要写数学分析的文章的，关于实分析我面临的一个选择是II写Lebesgue积分还是写抽象空间的内容（这方面我习惯性地分成两大类，就如一开始提及的『实变函数论』的内容一样），因为我本来想把Lebesgue积分也扔到 I 的，但现在的情况可能会让我选择下一篇续写实变函数论的内容。不过，我更想得到读者的建议，邮箱在文章最后，不介意的话也可以直接评论。

考场自习时手写的伪提纲（可以当成文章方向的参考）



我为数学分析文章建了一个Github仓库，我会在上面发布**统一的符号约定、补充、引用说明、勘误等**

和我的数学分析博客相关的任何东西：

https://github.com/MAKIROR/Mathematical-Analysis

在正事之外，我个人近期更多在啃复分析，而另一方面还有Machine Learning和其他方面的数学书想闭关修炼，此外也会有看各种心理学/哲学/经济学的各种东西，或者偶尔画点画也不错，很欢迎任何对我有兴趣的读者主动联系我，无论是正儿八经的学术话题还是柴米油盐扯家常都是可以的。

> 2024年1月24日，一位来自深圳的读者来广州和我见面了，这是我第一次和读者见面，特别感谢他送我的*Numerical Methods for Partial Differential Equations*，我有好好在看的。

引用资料（参考&拓展）

陶哲轩实分析(第3版) - Terence Tao

Foundations of Modern Analysis - Avner Friedman

Real Analysis (4th Edition) - Halsey Royden, Patrick Fitzpatrick

Wiki:
https://en.wikipedia.org/wiki/Real_analysis
https://en.wikipedia.org/wiki/Construction_of_the_real_numbers
https://en.wikipedia.org/wiki/Measure_(mathematics)