[数学分析 短篇] 分形几何与Cantor集

从 *Topology* 看康托尔集

引言

在我上一篇数学分析-实分析的正文的最后，提到了一种很特殊的集合叫“Cantor”集。这个东西在我们的数分，什么集合论拓扑学测度论分形论都很重要，所以我决定单独拿出来写短篇。

> 在外地设备条件限制，本文几乎所有推导都是参考一些印象中的思路并手写推导的，精神状态没那么好，如果有不严谨之处请指出 感谢（鞠躬）。
> 近期自己在学的东西比较多，挤了点空闲时间尝试写这种内容比较集中又耗时较短的文章。以及，对之后文章进度计划有疑问的留言区/私信/电邮见。

康托尔集在19世纪末被德国数学家 *Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor* 引入（但是在更早几年就被 *Henry John Stephen Smith* 发现了），是一个无限又不可数的集合，因为其奇特的性质，经常在实分析中被用于构造各种反例。而康托尔函数是一个被定义在 $[0,1]$ 上的实函数，它一致连续，单调递增，可以将疏朗集映射成连续的区间，它有很特殊的性质值得我们进一步研究。大概就这样。

作为一个小有涉猎拓扑学的小屁孩，更希望在本文把对康托尔集与Cantor函数的性质推广到 Hausdorff 维数来讨论，而不限于欧氏空间，如标题，这也是为了从分形几何的问题来探讨它们的性质，我们无法在欧氏空间中探讨康托尔集的分形，后面会说到为什么。

分形几何概论

分形几何是用于研究复杂不规则的几何形态和结构的数学理论，就一般我们会讨论的那些规则的几何图形，什么矩形、圆、三角形什么的，它们是规则，研究起来也容易。但是在自然界中居多的事物是以不那么规则的，比较复杂的形态存在的，因此就产生了分形（拉丁语 frāctus，意为“碎”，所以台译叫碎形幾何）这个数学概念，去描述所谓局部与整体以某种形式相似的情况。

本文虽然主要在讲康托尔集，但后半段会写到一些较为通用的拓扑学（分形几何）概念，如果之后会专门再写拓扑学文章有可能会直接沿用。~~其实我还是有精力卷各种现代数学的嘿嘿嘿~~

实数与康托尔集

严格来说，最初康托尔对康托尔集的描述是很抽象的，我们默认情况下会描述的“康托尔三分集”只是一种最具有代表性的康托尔集构造方法。康托尔集是实数轴上的一个紧致子集，同时它的测度为零，但是其基数却等于实数集的基数。

康托尔最早对康托尔集的描述可以追溯到他在1874年提出的一篇论文 *On a Property of the Class of all Real Algebraic Numbers* 中。在这篇论文中，他首次引入了“不可数集合”的概念，并描述了一种构造这样一个集合的方法，后来被称为康托尔集。他的描述的是通过一种对角线论证的方式来构造这个集合。他首先考虑存在一个可以用有限个实数表示的实数集合，然后通过构造一个新的实数，使得这个新的实数与原集合中的每一个实数都不相同，就得到了一个新的不可数的集合。

“无穷无尽”

在 *On a Property of the Class of all Real Algebraic Numbers* 这篇仅仅只有三页PDF的短论文中，康托尔指出实代数数是满足某种形式的非平凡方程的实数。具体地，考虑一个实数 ω ， n、a_0、a_1、$\ldots$、a_n 都是整数，有方程

$$a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

则我们称 ω 是实代数数，换句话说就是整系数多项式的根。

如果它的元素可以按照某种方式与自然数集合中的元素一一对应，我们则可以称一个集合是可数的。而如果非要说，虽然看着上面对实代数数的定义条件，从直觉上会认为实代数数集合比实数集合要小，它是可数无限集。

但其受到关注的重点不是什么“论所有实代数数类的总体性质”，而是关于康托尔将有穷集合推广到无穷集合的概念，也因此这篇论文被认为是集合论的开山之作。

我们再看什么是无穷。我们知道自然数集的基数是无穷大的，一般将其记为 $\aleph_0$（阿列夫零），直觉上实数集会比自然数集更密集，也就是更大吧？而根据连续统假设（Continuum hypothesis）的观点，我们把实数集的基数视作自然数集的基数的幂集 $2^{\aleph_0}$，不存在一个集合 A 满足 $\aleph_0 < |A| < 2^{\aleph_0}$，也就是不存在大于基数比自然数大而比实数小的集合。而在广义连续统假设（Generalized continuum hypothesis）中，则推广成了 $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$，由此得到的以此类推的阿列夫数 $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \cdots$ 就是所谓的超穷基数。

> 之前看到一个Comment，给我笑的：
> 小学时斗嘴时，“我的战斗力是正无穷！”“我的战斗力是正无穷*2！”

> 以后小学生吵架可能是“我的战斗力是 $\aleph_0$！” “我的战斗力是 $\aleph_1$！”
> 顺带一提我的战斗力是 $2^{\aleph_0}$ （

连续统假设已知当前是独立于ZFC（Zermelo-Fraenkel Set Theory）的，即在加上了选择公理的ZFC下，连续统假设既不能证明也不能证否。

而这个 $\aleph_1$ 被称为『连续统基数』，后续为了方便，我们此处定义的是 $\mathfrak{c} = \aleph_1 = 2^{\aleph_0}$。

康托尔三分集

就如上面所说，康托尔三分集是康托尔集构造最具有代表性的方式，也是因为几何意义上比较直观吧。因此也有很多时候人称“康托尔集”指的就是康托尔三分集。

我们考虑闭区间 $I = [0, 1]$，从中间分成三个相等的子区间，也就是去掉中间三分之一的子区间 $I_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$，于是有了剩下的线段就是被分开的两个区间的并集，即：

$$C_1 = I - I_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

同理地再分别将剩下的两个区间的三分之一去掉，即分别去掉 $I_{1,1} = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ 和 $I_{1,2} = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ 剩下：

$$C_2 = I - I_1 - I_{1,1} - I_{1,2} = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

就这么以此类推，在第 n 次进行三等分的操作时，我们会去掉原始区间长度的 $\frac{1}{3^n}$，去掉的区间个数是 2^{n-1}，得到 2^n 个区间的并集：

$$C_n = \bigcup_{i=1}^{2^n} I_{n,2^i}$$

n 取极限时，就定义为康托尔三分集：

$$C = \lim_{n \to \infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$$

> 有端联想到 “一尺之棰，日取其半，万世不竭。” 就这么理解也可以，不过我们取的是三分之一。

还有一种比较常见的方法就是用递归来描述康托尔集的构造（一些 Wiki 的描述方式），首先考虑 $C_0 = [0,1]$，则对于 $n \in \mathbb{N}$，我们第 n 步的递归就是:

$$
\begin{aligned}
C_n &:= \frac{C_{n-1}}{3} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{C_{n-1}}{3}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(C_{n-1} \cup (2 + C_{n-1})\right)
\end{aligned}
$$

因此康托尔集在这种定义下表示为:

$$
C := \lim_{n\to\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n
$$

表示康托尔集的端点，我们可以考虑三进制。例如第一次切割掉的部分我们用三进制小数就可以表示为 $(0.1, 0.2)$，而当我们用 $1 = 0.\dot{2}$ 表示时，我们就不需要再用到1，则可以很简单得将康托尔集定义为:

$$
C = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} : \forall n \in \mathbb{N}, a_n \in \{0,2\} \right\}
$$

康托尔集是实数区间 $[0,1]$ 上的一个特殊的紧致完全不连续子集，它包含了无限多个实数且不可数，也就是无法通过一一对应与自然数集建立映射，也因此它的基数为 $\mathfrak{c}$。

图展现的是一个四阶的康托尔集逐步构造的过程（顺序从上到下）:

性质

列举一些康托尔集这个奇特集合的性质

闭集

康托尔集是闭集。康托尔集可以看作是无限个闭区间的交集，每个闭区间都是有限个闭区间的并集，因此它本身也是闭区间。

而顺便，根据 Heine–Borel 定理，若一个集合是闭集且有界，则是这个集合紧致的（注意这两个性质是等价的，可以互换），而康托尔是闭集，很显然它是紧致的。

完美集（Perfect set）

> 抱歉我实在不敢肯定它正式的中文名（很多互相矛盾的中文文章），于是姑且用 Wiki 的叫法。

考虑拓扑空间 (X, τ)，有 $A \subseteq X$，A' 是 A 的导集，满足 $A = A'$。这意味着 A' 中的每个点都是 A 的极限点、A 的所有极限点在 A 中，则我们称 A 是完美集。

A 在上述定义中满足了以下性质：

- A 是 (X, τ) 中的闭集
- A 中没有孤立点，即不存在一个点 a 满足：存在一个邻域 U，除了点 a 自身以外，没有属于 A 的点在这个邻域中。
- A 包含了其所有极限点
- A 自身是稠密的

康托尔集是完美集。我们前面已经说明了康托尔集是闭集，于是我们再证明 C 中没有孤立点即可。

证明

当我们考虑任意点 $a \in C$ 时，就有 $\forall n \in \mathbb{N}$ 满足 $a \in C_n$。于是考虑 C_n 中的闭区间 I_n，I_n 的端点 a_n 满足 $a_n \neq a$，我们之前提到过在第 n 次进行三等分的操作时，我们会去掉原始区间长度的 $\dfrac{1}{3^n}$，因此我们有：

$$|a_n - a| < \frac{1}{3^n}$$

我们构造出了这个收敛到 C 中点 a 的序列 a_n，这样我们就证明了 a 是 C 中极限点，也就是 C 中的任意点 a 不是孤立的，因此康托尔集是完美集。

疏朗集

考虑拓扑空间 (X, τ)，有 $A \subseteq X$，若 A 的闭包 $\overline{A}$ 是 X，则我们称 A 是 X 中的稠密集。而如果

一个集合 A 的闭包 $\overline{A}$ 中没有内点，也就是它的内部是空集，则我们称之为疏朗集，或有的叫无处稠密集。

康托尔集是 $\mathbb{R}$ 上的疏朗集，即对于任何康托尔集中的点，其任何邻域都包含其他不属于康托尔集的点，这意味着康托尔集是无内点的。

证明

考虑闭区间 $(a, b) \subseteq [0, 1]$，且 $a < b$。再令 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $\frac{1}{3^n} < b - a$，由于每个 C_n 中的区间都是不重叠的，所以没有长度为 $b - a$ 的区间完全包含在 C_n 中。

因为康托尔集 C 可以视为 C_n 的并集 $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$，所以在 C 中也不存在长度为 $b - a$ 的区间，这也意味着 C 中不存在任何开区间，康托尔集是无处稠密的。

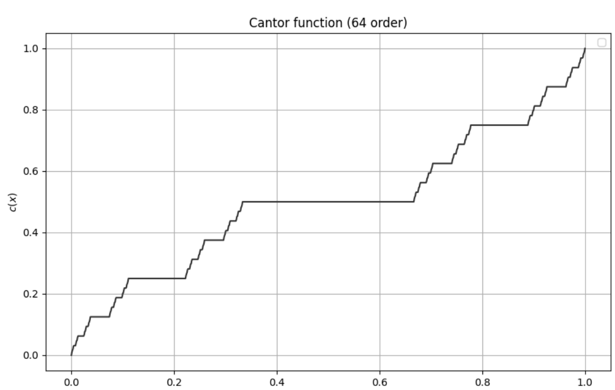
Lebesgue测度

在 $\mathbb{R}$ 上我们一般会讨论Lebesgue测度，而康托尔集是零测度集。我们知道当我们构造 C_n 时，它是 2^n 个长度为 $\frac{1}{3^n}$ 互不相交的闭区间的并，考虑Lebesgue测度 m 和Lebesgue外测度 m^*，我们有：

$$m^*(C) \leq m^*(C_n) \leq \frac{2^n}{3^n}$$

根据康托尔集的定义我们只需对 $\frac{2^n}{3^n}$ 取 $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^n} = 0$。而我们知道勒贝格测度必定非负，因此可以得出 $m(C) = m^*(C) = 0$。

康托尔函数



康托尔函数是一个在 $[0, 1]$ 上定义的，连续的单调非递减函数。

我们可以考虑 $f_0(x) = x$ 和一个收敛到康托尔函数 c 的函数序列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$：

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f_n(3x) & x \in [0, \frac{1}{3}) \\ \frac{1}{2} & x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_n(3x - 2) & x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

康托尔函数的一些性质（有时间再发证明）：

- 康托尔函数是一个满射，每个 $[0,1]$ 中的实数都对应到 $[0,1]$ 中的唯一实数。
- 康托尔函数是连续但不绝对连续的，在 $[0,1]$ 上是单调递增的。
- 康托尔函数将 $[0,1]$ 区间上的有理数映射到一个稠密的集合，即它的像集在 $[0,1]$ 中是稠密的。
- 康托尔函数几乎处处可微，可微点组成的集合基数为 $\mathfrak{c}$

康托尔函数还有另一种我觉得更直观的定义，考虑 x 的三进制展开 $\{a_n\}$:

$$c(x)=\begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}, x\in C\\ \sup_{y\leq x}, y\in C c(y), x\in[0,1]\backslash C\end{cases}$$

因为我们知道，构造康托尔集这个过程可以用三进制展开来描述，其中 a_n 表示 x 的三进制展开的第 n 位数字，这种表示方式能够直接反映出康托尔集的构造过程。以及 c 是连续且单调非递减的，所以在 $\in[0,1]\backslash C$ 时取其上确界即可。

拓扑与分形几何

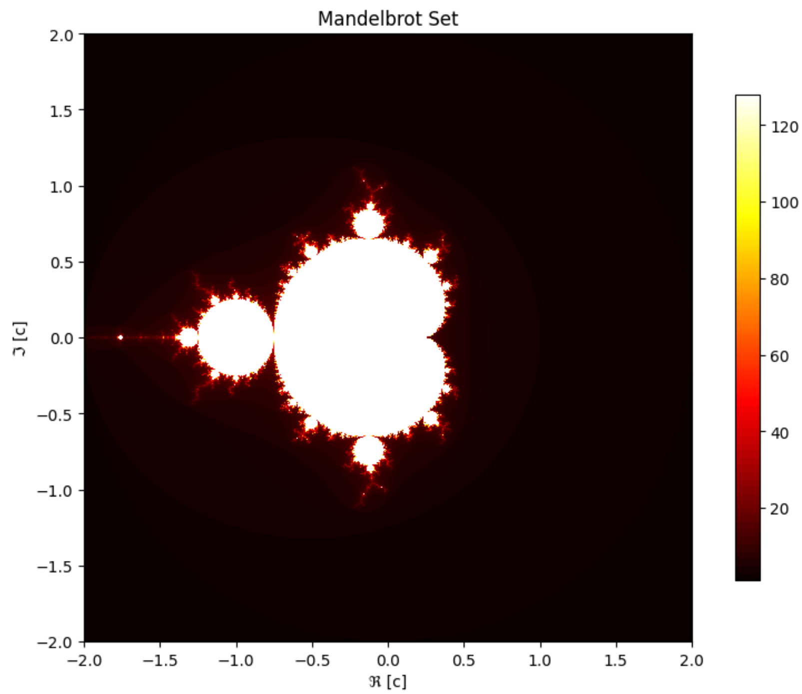
好，现在我们已经大概知道康托尔集是个什么东西了，所以就直奔拓扑学吧。

自相似性

所谓自相似（Self-similarity）指的是一个对象的一部分与整体的某个部分具有相似的结构，也就是无论我们放大或缩小这个对象，它的局部结构都会以某种方式重复出现，从而保持整体上的相似性，它可能精确也可能近似。而很多自然界的事物都呈自相似，一个非常具有代表性也显而易见的就是罗马花椰菜。而我们所谓的分形一般定义为具有自相似性的物体。

> 我有点密恐就不放罗马花椰菜了，自己用matplot整了个Mandelbrot集合作例子（其实更多是不喜欢引用外部图片，我也懒得去市场买个罗马花椰菜来拍吧）

如图是曼德博集（Mandelbrot set）的图示，它是一种在复平面上组成分形的点的集合。考虑一个复数 c ，先定义一个复数二次多项式 $f_c(z)=z^2+c$。我们从 $z_0=0$ 开始迭代 $f_c(z)$ ，参数 c 的选择可能会导致 $|z|$ 在无限次迭代后趋于无穷大，但如果 $|z|$ 始终保持在某个有限的范围内，则我们称 c 属于曼德博集。



此处不多说其代数性质，就看图像。曼德博集的图像在各个尺度上都具有自相似性，无论你放大图像多少倍，都可以看到类似的结构重复出现，这种自相似性是分形的典型特征。

Hausdorff 维数

先说，Hausdorff 测度是 Lebesgue 测度在度量空间中的推广，它是一种更一般化的测度，适用于任意度量空间上的子集，包括那些非标准的、具有分形结构的集合，不过本文我们讨论 Hausdorff 维数，也就是在 Hausdorff 测度下描述集合维度的概念即可。而至于 Hausdorff 测度的各种性质，之后专门写拓扑学短篇的话再深挖它好了。

在欧氏空间中，直线的维数是1，平面的维数是2，立体的维数是3，这是再简单不过的常识。但是在欧氏空间中我们常用的“维数”通常只适用于规则的集合对象。而许多分形集合，如科赫曲线、曼德博集等，我们无法用整数维度来描述其几何特征，于是需要这么一种维数来描述它们。Hausdorff 维数是用来描述拓扑空间的维数的一种方式，也因此很多时候人们口中的“分形”指的就是 Hausdorff 维数是分数的几何体。

我们要通过 Hausdorff 外测度的定义来引出 Hausdorff 维数的定义，先考虑度量空间 (X,d)，考虑 $A\subseteq X$，$\delta>0$，$\mathcal{D}(U_i)$ 表示 U_i 中点之间的最大距离也就是直径，定义：

$$H_\delta^s(A)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{D}(U_i):A\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i,\ \mathcal{D}(U_i)<\delta\right\}$$

意思就是 H 取所有可能的覆盖方式中的下确界，我们再定义这个子集 A 的 s 维的 Hausdorff 外测度为：

$$H^s(A):=\lim_{\delta\to0^+}H_\delta^s(A)$$

集合 A 的豪斯多夫维数 H_H 定义为使得上述外测度存在有限非零值的最小的值 α:

$$D_H(A)=\inf\{\alpha:\mathcal{H}^\alpha(A)=0\}$$

D_H 是集合的维度，而我们上述定义使得集合 A 在这个维度下的外测度不为零，因此这个维度被认为是描述集合几何结构的最小维度。你看，我们回归主题，这从理论上不就是解决了康托尔集“勒贝格零测度”的问题?
当然这只是理论上的，我们需要一种更直观的计算 Hausdorff 维数的思路和方式，换一个看法。如果我们能用 N 个缩放到原本集合 ϵ 倍的集合覆盖 A，则其 Hausdorff 维数为:

$$D_H(A)=\frac{\log N}{\log\frac{1}{\epsilon}}$$

这不是直观又直白多了吗?

我们考虑一个在实数轴上的有界勒贝格零测度集 X ，则 $D_H(X)\in[0,1]$ 具备一些显而易见的性质:

- 如果 X 是区间，则 $D_H=1$
- 如果 X 是单个点或可数集，则 $D_H=0$
- 如果 $X\subset Y$，则 $D_H(X)\leq D_H(Y)$

一些康托尔集

康托尔集有很多种，经典的康托尔集都是精确自相似的，这意味着康托尔集中的每个子集都与整个康托尔集本身“同胚”（定义在后面），直白的认知是它们在拓扑学的意义上是等同的。

简单的康托尔分集

从直观的几何来说，我们知道康托尔三分集是无限次从中间分成三个相等的子区间构成的。如果我们有一个康托尔三分集 C，可以将其分为两个部分（左边和右边）记为 C_L 和 C_R，它们在实数轴上的长度相等，都是 C 的三分之一。因此我们可以考虑用两个缩放到原本长度的 $\dfrac{1}{3}$ 的集合覆盖 C，即 $N=2,\epsilon=\dfrac{1}{3}$，可带入求 C 的 Hausdorff 维数:

$$D_H(C)=\frac{\log 2}{\log 3}=\log_3 2\approx 0.630929754$$

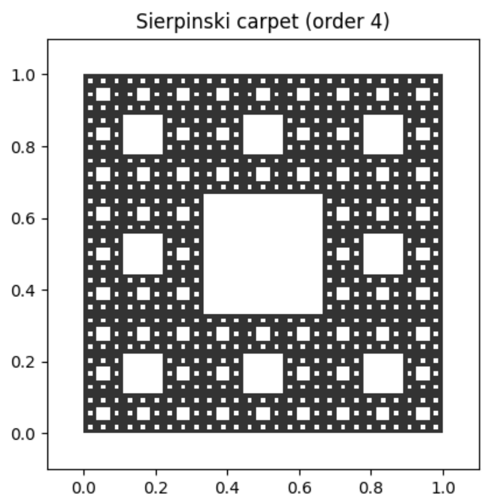
康托三分集可以进一步的推广到多分集，例如当我们选择删去区间中间的五分之三，也就是两端长度分别为原来的 $\dfrac{1}{5}$，我们就还能取 $N=2$，$\epsilon=\dfrac{1}{5}$，若这个五分集叫做 $\hat{C}$，我们就能得到:

$$D_H(\hat{C}) = \frac{\log 2}{\log 5} = \log_5 2 \approx 0.430676558$$

当然，这种分集都非常简单，以此类推怎样都可以，而我们现在可以进到更高维度讨论较为复杂的康托尔集。

Sierpinski 地毯

我们当然能将构建在 $[0,1]$ 的康托尔集推广到二维三维甚至更高。谢尔宾斯基地毯（波兰语 Dywan Sierpińskiego）是一种自相似集，一种分形。在二维的情况下，我们将一个正方形九等分成小正方形，并除去中间的那个，剩下八个，如此循环。



还是先用很直观的迭代法，第一步我们可以定义 1

对于 $n \in \mathbb{N}$，我们能很简单地定义第 n 次迭代的面积：

$$S_n = \left(\frac{8}{9}\right)^n = S_{n-1} - \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n$$

提一句，这里是以初始的边长1为前提的，如果边长是 a，我们直接写成这样来算就行了：

$$S_n = \left(\frac{8}{9}\right)^n \cdot a^2 = S_{n-1} - \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n \cdot a^2$$

n 取极限时，就定义为Sierpinski 地毯：

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n$$

可以注意到很多地方与康托尔三分集有异曲同工之妙，每个小正方体都是原来的 $\frac{1}{3}$，于是我们也能用三进制来描述。我们将 Sierpinski 地毯视为一个在二维平面上的子集即 $S_0 = [0,1] \times [0,1]$，于是对于趋于无穷的 n，我们有：

$$S = \left\{ (x,y) \in S_0 \;\middle|\; x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n},\ y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n}, (a_n, b_n) \neq (1,1),\ a_n, b_n \in \{0,1,2\} \right\}$$

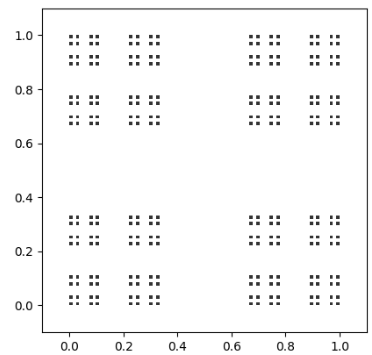
很显然，正如本节一开始所说，Sierpinski 地毯也是一个精确自相似的例子。经过一次迭代后，每个小正方形都是原本的 $\frac{1}{3}$ ，有八个，即 Sierpinski 地毯的 Hausdorff 维数为：

$$D_H(S) = \frac{\log 8}{\log 3} = \log_3 8 \approx 1.892789261$$

Sierpinski 地毯拓展到三维叫门格海绵（Menger sponge），也就是将立方体分成27个部分，中间的7个去掉，是同理的，其 Hausdorff 维数为：

$$D_H(M) = \frac{\log 20}{\log 3} = \log_3 20 \approx 2.7268330274$$

但严格来说，这种定义的 Sierpinski 地毯并不是康托尔三分集的二维度推广，如果要是，就应该将正方形九等分后分别除去横轴和纵轴三等分后中间列的三个正方形，三进制表示为：



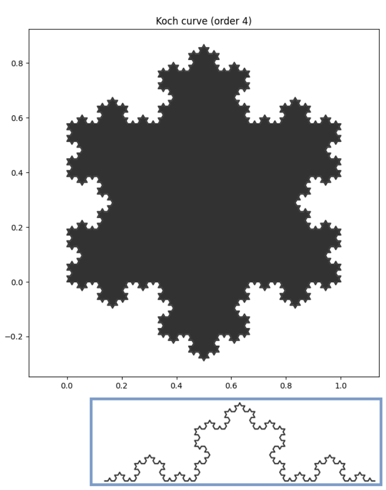
$$\hat{C} = \left\{ (x, y) \in S_0 \,\middle|\, x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n},\ y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n},\ a_n, b_n \in \{0, 2\} \right\}$$

显而易见这玩意儿的Hausdorff 维数为：

$$D_H(\hat{C}) = \frac{\log 4}{\log 3} = \log_3 4 \approx 1.261859507$$

科赫曲线

科赫曲线（Koch curve）也是一种很经典的分形，初始是一个等边三角形，每次迭代将边三等分，并以中间的一段为底向外构建等边三角形，再去掉中间作为底的部分。



例图是一个整体呈雪花状的迭代了四次的科赫曲线（因此也有人称它为科赫雪花），蓝框是局部的一个迭代了4次的边。
很显然地，当初始三角形边长为 a 时，在第 n 次迭代，其周长为：

$$L_n = 3a \left(\frac{4}{3} \right)^n$$

当 n 趋于无穷大时，其周长也无穷大：

$$L = \lim_{n \to \infty} L_n = 3a \left(\frac{4}{3} \right)^{\infty} = \infty$$

也因此有什么“英国的海岸线无限长”的说法，其实更应该说英国的海岸线不确定，取决于测量精度，现实是你的精度也做不到无限高吧。

> 在我小时候，只记得大概是三四年级，还在跟着人教版数学进度学习的时候，有发呆时无端思考过类似的问题（当时完全不知道什么分形几何科赫曲线），当时脑补了一种“用极细的线贴合着粗糙的表面”，我便想过如果线细的程度足够极端并且完全贴合丝毫没有误差，这根线应该会长的无法估计。
>
> 可恶 要是我早一百多年出生会不会是分形几何第一人阿（倒地不起）

科赫曲线在一次迭代会被四等分，其中每份是原来的 $\frac{1}{3}$，所以科赫曲线的 Hausdorff 维数显然为：

$$D_H(K) = \frac{\log 4}{\log 3} = \log_3 4 \approx 1.261859507$$

假设我们要构建科赫曲线的初始等边三角形的边长 $K_0 = 1$，其初始的面积就是 $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$，在第 $n+1$ 次迭代时添加的三角形数量为 $3 \cdot 4^n$，于是我们能获得到面积公式：

$$A_{n+1} = A_n + \frac{3 \cdot 4^n}{9^{n+1}} A_0$$

每次迭代都会添加原本数量四倍的等边三角形，并且面积是上一次迭代三角形的九分之一，所以有 $4 \cdot \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$，我们却可以使用几何级数算出科赫雪花的面积：

$$\begin{aligned}
A = \lim_{n\to\infty} A_n &= A_0 \lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{4}{9}\right)^i\right] \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{9}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{8}{5} \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{5}
\end{aligned}$$

当然，刚才我们推出来的这坨东西，对于初始面积是 A_0 的等边三角形，科赫曲线面积为 $\frac{8}{5}A_0$

同胚

由康托尔集构造的一个拓扑空间我们称之为康托尔空间，定义上一个与康托尔集同胚的拓扑空间就是康托尔空间。

考虑两个拓扑空间 $(X, \tau_X), (Y \tau_Y)$ 和映射 $f : X \to Y$，f 与其反函数 f^{-1} 都是连续的，且 f 是双射，则我们称 (X, τ_X) 和 $(Y \tau_Y)$ 是同胚的。同胚保持了拓扑空间的拓扑性质，意味着两个同胚的

空间在拓扑学上是等同的，它们的拓扑性质是相同的，但两个空间的几何结构和度量未必是相同的。

康托尔集有些共同的拓扑性质，即它们都是不连通的、完美的、无内点的紧致集合，并且是可度量的。一个拓扑空间是康托尔空间当且仅当满足这些性质。根据 Brouwer 定理的描述，康托尔集是在同胚意义下, 唯一完美、紧致、零维的可度量化空间。

参考 & 引用资料

1. Cantor, G.(1874). *On a Property of the Class of all Real Algebraic Numbers.*
2. Jason Baker, Kyle Henke, Michael Sanchez. *Lebesgue Measure and The Cantor Set*
3. ZIQIAN (ALEXA) JIN. *CANTOR SETS IN TOPOLOGY, ANALYSIS, AND FINANCIAL MARKETS*
4. Falconer, K. J. (1986). *The Geometry of Fractal Sets*
5. Mark Pollicott. *Cantor sets, Hausdorff dimension and their applications*
6. Whyburn, Gordon (1958). *Topological chcracterization of the Sierpinski curve*

Wiki:

- https://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_set
- https://en.wikipedia.org/wiki/Hausdorff_space

MAKIROR gzanan@gmail.com 16:24 17/02/2024