[数学分析] 友好的 实分析导读 II

引言

月考刚过，一模近在咫尺，某人还有闲心摸鱼写文章，简直太可耻了。

经过了我一番并不激烈的思想斗争，我决定在实分析的 II 篇继续写实变函数论的部分。之前的 I 篇大多都着重在测度论，那现在是时候积分迈进了。估计之后的实分导读系列会写抽象空间方面的东西，“导读”类文我一般会写比较广的概念。

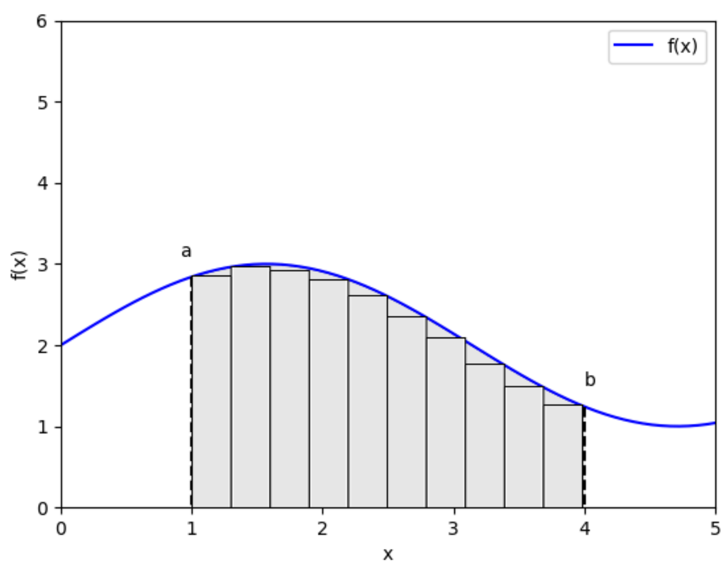
前置知识

黎曼积分

（据我所问）高中或以上的读者应该已经接触过定积分的概念了，一般教材里提到的定积分就是指黎曼积分。对于定义在有限闭区间上的函数，黎曼积分提供了一种计算曲线下面积的方法。

考虑到零基础的读者，此处先介绍一下最基本的黎曼积分。黎曼积分的基本思想是将区间分割成许多小的子区间，然后在每个子区间上取样，最后求出这些小区间上的函数值与对应的区间长度的乘积之和，并在这些和随着区间长度趋于零的极限下求和，得到定积分的值。

取样分割与黎曼和



考虑实数 $a < b$，在闭区间 $I = [a, b]$ 内取有限个点 $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$，于是 I 就被分成了有限个子区间：

$$I = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \ldots \cup [x_{n-1}, x_n]$$

对于每个子区间 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$，我们会取一个点 $x_i \le \xi_{i-1} \le x_i$，这个操作我们称为**取样分割**。

然后我们求得每个 ξ_i 处的函数值 $f(\xi_i)$，定义每个子区间宽度为 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$，即可计算每个子区间的矩形面积，定义**黎曼和**的和式为：

$$R(f,x_0,x_1,...,x_n)=\sum_{i=0}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

不难发现，当我们取样分割的越多，也就是越精细，黎曼和就越接近实际曲线下的面积，因此只要祭出极限，我们就能严格地定义黎曼积分了。

黎曼可积与定义

一个函数被称为黎曼可积（Integrable）指的是该函数的黎曼积分存在且有限。

考虑函数 $f(x)$，定义在 $[a,b]$ 上，对应的黎曼和记为 $R(f,x_0,x_1,...,x_n)$，I 是一个实数，使得对于任意正实数 ε，都存在一个 $\delta>0$，使得当每个 Δx 都小于 δ 时，存在一个正整数 N，对于所有的 $n>N$，都有 $|R(f,x_0,x_1,...,x_n)-I|<\varepsilon$，就如直观理解的那样，实际的积分中会存在一定误差，而这个误差应该被控制住一个范围内，这个 ε 就是对黎曼积分精度的要求。

则我们称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是黎曼可积的，此时 $\lim_{n\to\infty}R(f,Rx_0,x_1,...,x_n)=I$

考虑函数 $f(x)$ 的黎曼积分存在，其黎曼积分的定义为：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

或者有些文档/教材会将其表述为每个取样分割的宽度趋近于0。令 $\sigma=\max_{0\le i\le n}(\Delta x_i)$，如果函数 $f(x)$ 的黎曼积分存在，我们同样可以记为：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\sigma\to 0}\sum_{i=0}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

测度与积分

我们应该先认识到我们需要勒贝格积分的原因，从黎曼积分的局限性开始。

首先，黎曼可积空间是不完备的。考虑区间 $[a,b]$ 上的黎曼可积函数空间的两个函数 $f(x),g(x)$ 之间的距离为：

$$d(f,g)=\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$$

此时 $(R[a,b],d)$ 构成一个度量空间，我们引入一列在 $[a,b]$ 上的连续函数 $\{f_n\}$，如果它们在该黎曼可积函数可积中收敛到一个函数 f_m，则对于任意正实数 ε ，存在正整数 N 使得当 $n>N$ 时有 $d(f_n,f_m)<\epsilon$。回顾我在 实分析 I 所写的“如果一个度量空间中的任何柯西列都收敛在该空间之内，那么这是一个完备度量空间。”，未必存在黎曼可积函数 f_m 使得：

$$\lim_{n\to\infty}d(f_n,f_m)=0$$

因此黎曼可积函数空间是不完备的。

其次，黎曼可积的条件本身就并不那么友好，首先要求函数是有界的，其次根据勒贝格可积准则（Lebesgue's Integrability Criterion），一个函数在闭区间上黎曼可积当且仅当其间断点的集合的测度为零。直观来说，这意味着黎曼可积函数得“基本上”是连续函数。这些是相当苛刻的，数学里很多奇形怪状的函数会受限于此。

> 这里有个文档对性质的解释很浅显，具体了解勒贝格可积准则请看 https://www.math.mcgill.ca/labute/courses/255w03/L10.pdf

以及黎曼积分就连一些常见且重要的性质，也有比较严苛的条件，例如我们常用的，对于 $[a,b]$ 上的函数序列 $\{f\}$ ，如果要具备积分与极限交换的性质：

$$\int_a^b f\mathrm{d}x=\int_a^b\lim_{n\to\infty}f_n\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\mathrm{d}x$$

则 $\{f_n\}$ 必须是一致收敛的。

为了改进积分，使其能拓展到任何测度空间中，我们需要一种更合适的积分的定义方式。我们知道测度是集合的一般化度量的概念，而勒贝格积分是定义在测度空间上的一种积分方法，它是函数在集合上的积分的一种更为一般的定义，相对于黎曼积分来说更为灵活，能够处理更多奇形怪状的函数，例如不连续函数、发散函数等。*具体的性质在后文给出。*

前几天有个数学系大一的朋友问了我一个问题：“既然勒贝格积分比黎曼积分更好，为什么我们还要先学黎曼积分？” 我想先说的是，严格来讲勒贝格积分和黎曼积分不能简单粗暴地论优劣，你顶多说勒贝格积分的定义更一般。并且通过后面我们了解定义，就会发现，抛开对测度意义上的强调，勒贝格积分也不能被说成是黎曼积分的推广，它们只是两种不同的定义罢了。

另外，数学是要说所谓“术业有专攻”的，大部分人都逃不掉的所谓『高数』一般不会像『分析学』的那些内容一样，要构造一些很奇怪很另类的函数来研究多么复杂的理论，可能从学习内容上就差很远。我们初学高等数学里的“积分”的时候可能就会学习各种的公式和定理，一般可能是处理一些连续可微，理想一点是光滑的函数，然后用技巧来算出函数的积分；但是已经有学分析的读者会发现，在这里我们真的极少会要去算一个具体的积分值。

初识巴拿赫空间

为了后续更好介绍勒贝格积分，此处先引入巴拿赫空间的基础概念。关于“巴拿赫空间”更系统的介绍，之后会在泛函分析的文章写，在实分析阶段我们要着重的一般是被称为 L^p 空间

> 注：本章开始一般假设读者已阅读过往期文章 **[数学分析] 友好的 实分析导读 I** 或已掌握测度论相关的基础知识，故不再完整地重复基础概念。

赋范空间

人们为向量空间中的向量赋予了一个长度的概念，名为范数（Norm）。考虑赋范空间 K 和其向量空间 X，则其范数是一个映射：

$$\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

并满足以下性质：

- 非负性：范数的值为非负实数
- 齐次性：对于向量 $\mathbf{v}$ 和任意实数 α， 满足 $\|\alpha x\| \leq |\alpha| \cdot \|x\|$，这意味着向量缩放，也就是乘一个实数，其范数会相应缩放。
- 三角不等式：范数满足 $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$，这意味着两个向量之和的范数不会超过它们的范数之和。

如果存在常数 n，使得空间中的每个点都可以由至多 n 个有序参数表征（用一组有序的参数来唯一表示空间中的点），则这个空间是有限维空间，n 是维度，有限维的 n 维赋范空间与 $\mathbb{R}^n$ 同构。

经典巴拿赫空间

巴拿赫空间的定义很简单，就是完备的赋范空间，换句话说是“具备了完备范数的向量空间”，这意味着其中的柯西列都是收敛的。

例如，欧氏空间就是典型的巴拿赫空间，其范数为欧几里德范数（L2）$\|\mathbf{v}\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ 。或者在泛函分析中我们常说的希尔伯特空间，也就是能从巴拿赫空间中的范数诱导满足平行四边形法则的内积的，一个完备的内积空间。

在泛函分析中我们经常会跑去研究无限维的函数空间，不过在实分析为主的本文我们只需要关注勒贝格可积函数构成的函数空间，也就是 L^p 空间。

p-范数

> 约定：文中统一用 $\overline{\mathbb{R}}$ 表示广义实数轴

在赋范向量空间中，我们一般将距离度量定义为其分量的 p 次幂之和求 p 次方根来计算，所以称之为 p-范数。例如当 $p=1$ 时，我们称之为曼哈顿范数（L1，$\|\mathbf{x}\|_1=\sum_{i=1}^n |x_i|$）；当 $p=2$ 时，就是我们常说的欧几里德范数（L2，$\|\mathbf{x}\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$）。

当空间维度有限或可数无限时，考虑在 $\mathbb{R}^n$ 中的向量 $\mathbf{x}$，非负实数 p，我们将其 p-范数 定义为：

$$\|\mathbf{x}\|_p=\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

但是当空间维度无穷且不可数时，我们没法用上面对于有限维或可数维度空间的方法来定义范数。

先写定义。给定测度空间 $(X,\mathcal{M},\mu)$ 和广义实值函数 $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$，$f$ 是 X 上的可测函数，有 $p\in[0,\infty]$，则称 $\|f\|_p\in[0,\infty]$ 为 f 的 p-范数。当 p 有限时，定义为：

$$\|f\|_p=\left(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

当 $p=\infty$ 时，我们称之为一致范数，定义：

$$\|f\|_\infty=\inf\{M\in\mathbb{R}_{\geq 0}:|f|\leq M\}$$

一般来说，当 $\mu(X)>0$ 时，我们会称 $\|f\|_\infty$ 为 f 的本质上确界（Essential infimum），意思就是测度意义下的上确界：忽略掉测度为零的集合后，函数在剩余集合上的上确界。

需要提醒的是，尽管我们经常 p-范数 地说，但是当 $p<1$ 时，p-范数 就不是符合定义的范数。当 $p=0$ 时，范数的齐次性不被满足，因为 $\|kx\|_0\neq|k|\cdot\|x\|_0$ 未必成立。而当 $0<p<1$ 时，范数的三角不等式不被满足。考虑两个非零向量 $x=1$ 和 $y=-1$，我们有：

$$\|x+y\|_p = (|1|^p + |1^p|)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}}$$

$$\|x\|_p + \|y\|_p = 1 + 1 = 2$$

显然，这种情况时，$2^{1/p} > 2$，因此三角不等式不被满足。

L^p 空间

L^p 空间是特殊的赋范线性空间，由在某一域上的所有满足 p-范数有限的函数所组成的集合。L^p 空间是定义在勒贝格测度上的可测函数的集合，其中函数的 p-范数由勒贝格测度下的积分给出，因此，有时候 L^p 空间 也被称为勒贝格空间。L^p 空间也是一种典型的巴拿赫空间，特别地，当 $p = 2$ 时，它还是傅里叶分析中常用的希尔伯特空间 $L^2(S^1)$。 这个咱暂时不多谈

定义上来说，L^p 空间有分实复两种，为了方便定义，此处定义域 $\mathbb{K}$ 为 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$。给定测度空间 $(X, \mathcal{M}, \mu)$，对于 $1 \leq p < \infty$，L^p 空间定义如下:

$$L^p(X,\mu) = \left\{ f : X \to \mathbb{K} \;\middle|\; f \text{ measurable}, \ \|f\|_p < \infty \right\}$$

> 仅此处定义表示为 $L^p(X,\mu)$ ，之后在非必须澄清的地方都会简化为 $L^p(X)$ 来表示，而 L^p 则用来统称满足此定义的一类空间

L^p 空间是一个向量空间，通常通过函数之间的加法和标量与函数的乘法来定义。$\forall f, g \in L^p(X)$, $\lambda \in \mathbb{K}$，有:

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- $\lambda f(x) = (\lambda f)(x)$

在关于勒贝格测度的实践中，我们经常使用的是 $L^p(\mathbb{R}^n, m)$，这也是在实分析中重要最典型最常见的例子。而有时我们还会把空间限制在某个区间，形如 $L^p([a,b])$。

Hölder 不等式

先说柯西-施瓦茨不等式，对于实数或复数（即 $\mathbb{K}$）的内积空间 V 中的两个向量 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{u}$，有:

$$\|\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle\| \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{u}\|$$

Hölder 不等式之所以被认为是 L^p 空间性质中最重要的不等式之一，是因为它是我们常用的柯西-施

瓦茨不等式的推广。考虑实数 $p,q \leq 1$，函数 $f \in L^p(X), g \in L^q(X)$，满足 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，则 Hölder 不等式表示为：

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

容易发现，当我们将柯西-施瓦茨不等式应用于 L^2 空间中的函数时，即取 $p=q=2$，Holder不等式退化为柯西-施瓦茨不等式。

Minkowski 不等式

考虑有限正实数 $1 \geq p \leq \infty$，函数 $f \in L^p(X), g \in L^q(X)$，则有：

$$\|f+g\| \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

而当 $0 \leq p \leq 1$ 时，则是 $\|f+g\| \geq \|f\|_p + \|g\|_p$。

 显然，当 $p=2$ 时，也就是在内积的形势下，Minkowski 不等式退化为欧几里得空间中的三角不等式。而对于其他 p 值，这个不等式提供了对函数空间中范数的一种有用的估计。另外 Minkowski 不等式还有一种积分形式的表示。考虑实数 $p>1$，f,g 在 $[a,b]$ 上可积，则有：

$$\left(\int_a^b (|f+g|)^p\right)^{\dfrac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\dfrac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{\dfrac{1}{p}}$$

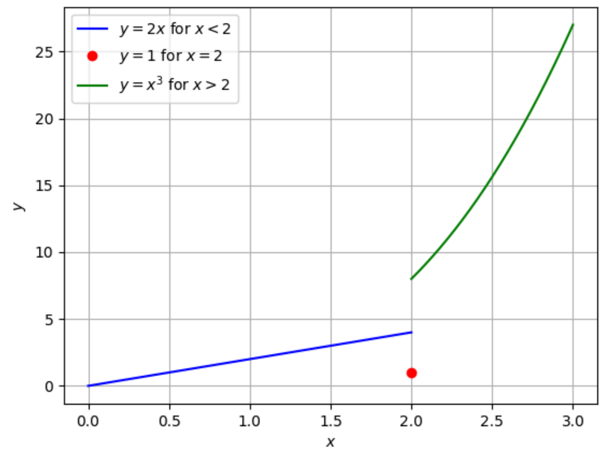
同样当 $0 \leq p \leq 1$ 时，另外 f,g 非负，则上式的不等号相反。

> 好，打住打住，到此为止我们了解的概念就已经够我们接下来在本文“实分析”中的运用了，而更一般的，一般会放在泛函分析讨论的东西，我们就之后再讨论吧。

勒贝格积分

几乎处处

 所谓“几乎处处”，指的是对于一个集合考虑性质 P，不符合这个性质的元素的集合测度为零，则我们称这个集合是几乎处处 P 的（不特别强调的情况下，我们默认为勒贝格测度）。



拿我们最经常要说的“函数几乎处处连续”为例。如图是一个分段函数：

$$f(x) = \begin{cases} y = 2x & x < 2 \\ y = 1, & x = 2 \\ y = x^3, & x > 2 \end{cases}$$

很显然在 $x = 2$ 处的点很明显是不连续的，但是它只是一个点，测度为零，因此我们称函数 f 是几乎处处连续的。

可测与可积

显而易见地，函数的勒贝格可测性是指函数在测度空间中的勒贝格可测性质。给定测度空间 $(X, \mathcal{M}, \mu)$，函数 $f : X \to \mathbb{R}$ 是勒贝格可测的。由于勒贝格可测函数的定义涉及到对所有形如 $(-\infty, a]$ 的半开区间的原像进行逆映射，所以对于任意实数 a，集合 $f^{-1}((-\infty, a]) = \{x \in X : f \leq a\}$ 在该测度空间中也是可测的。

Lusin 定理

实分析中，Lusin 定理指出，每个可测量的函数都是几乎连续的

给定勒贝格测度空间 $(X, \mathcal{M}, m)$，考虑 X 上几乎处处有限的可测函数 f，那么 $\forall \varepsilon > 0$ 都存在闭集 $C_\varepsilon \subset X$ 使得 $m(E \backslash C_\epsilon) \leq \varepsilon$，且 f 是 C_ε 上的连续函数。

我们也可以将其推广到高维的形式，再设正则 Borel 测度 μ 和其可测函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$。对于 $\mu \in \mathbb{R}^n$ 的 μ 可测集，若 $\mu(X)$ 有限，则 $\forall \varepsilon > 0$ 都存在紧集 $K_\varepsilon \subset X$ 使得 $\mu(X \backslash K_\varepsilon) < \varepsilon$，且 f 是 K_ε 上的连续函数。

其意义可以理解为，实数轴上的每个可测量函数都可以用其子集上的连续函数来近似，且误差任意小。

再说可积性，先前我们讨论的黎曼积分，是定义在有界闭区间之上的，仅针满足那满足了苛刻的黎曼可积条件的有界函数。而当我们尝试将黎曼积分推广到整个实数轴时，黎曼积分在某个区间上可能会未定义或无限，例如函数在积分区间上存在无界的点、积分的上/下限趋近于无穷，这个黎曼积分就会

被视为不当的（Improper），这使其可能会失去一些好的性质。

与黎曼积分不同，勒贝格积分不仅定义在有界闭区间上，还可以定义在更一般的测度空间上，例如实数轴上的任意子集或更一般的测度空间。

继续先前的定义，我们会将这个函数 f 分为两部分讨论，分别为：

$$
\begin{aligned}
&f^- = \max\{-f, 0\} \\
&f^+ = \max\{f, 0\} \\
&f = f^+ - f^-
\end{aligned}
$$

我们分别将 f^- 和 f^+ 称为 f 的负部和正部。函数的正部和负部本身都是非负可测函数，而如果：

$$\int_X f^- \mathrm{d}\mu < \infty \ \text{ and } \ \int_X f^+ \mathrm{d}\mu > \infty$$

也就是它们都是有限值时，我们称函数 f 是勒贝格可积的。而考虑 $|f| = f^+ + f^-$，若满足：

$$\int_X |f| \, \mathrm{d}\mu < \infty$$

那么我们称 f 是绝对可积的。

基本性质

由于后面某些特殊的勒贝格积分的性质的证明需要用到一些勒贝格积分的基本性质，所以此处先列出几条勒贝格积分的基本性质。给定测度空间 $(X, \mathcal{M}, \mu)$，$A, B \in \mathcal{M}$ 以及 $f, g, h \in L(X)$：

$$g \leq h, \ \int_X g \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X h \, \mathrm{d}\mu$$

$$\left| \int_A f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_A |f| \, \mathrm{d}\mu$$

$$\mu(A) = 0, \ \int_A f \, \mathrm{d}\mu = 0$$

因为 L^p 空间是线性空间，所以勒贝格积分具有**线性性质**，下面的性质成立：

$$c \in \mathbb{C},\ \int_X c\, f\ \mathrm{d}\mu = c \int_X f\ \mathrm{d}\mu$$

$$\int_A (f+g)\ \mathrm{d}\mu = \int_X f\ \mathrm{d}\mu + \int_X g\ \mathrm{d}\mu$$

勒贝格积分具备**对积分区域的可列可加性**，即:

$$A \cap B = \emptyset,\ \int_{A\cup B} f\ \mathrm{d}\mu = \int_A f\ \mathrm{d}\mu + \int_B f\ \mathrm{d}\mu$$

进一步地，考虑 f 在 $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ 上可积，且每个 E_i 可测和互不相交，即 $\cap_{i=1}^{\infty} E_i = \emptyset$ ，则:

$$f\ \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f\ \mathrm{d}\mu$$

> 引用一下芝加哥大学的 JACOB STUMP. *INTRODUCTION TO THE LEBESGUE INTEGRAL*，里面对很多勒贝格积分的基本性质的证明非常浅显和详细，感兴趣的读者可以去看看。**多靠看Proofs来加深理解性记忆是很棒的**

收敛定理 (-y+ies)

此处给出一些描述函数序列的收敛性质的定理，使得我们可以更容易地将极限与积分交换。给定测度空间 $(X, \mathcal{M}, \mu)$。

先说单调收敛定理（Monotone convergence theorem），考虑一列定义在 X 上的可测函数 $\{f_n\}$ 逐点单调递增或递减，即对于几乎处处的 $x \in X$ 都有 $f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f_n \leq \ldots$ 且它们逐点收敛到一个函数 f， $\lim_{n\to\infty} f_n = f$，那么有:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\ \mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n\ \mathrm{d}\mu = \int_X f\ \mathrm{d}\mu$$

再说勒贝格控制收敛定理（Lebesgue dominated control theorem）。

考虑一列定义在 X 上的可测实函数 $\{f_n\}$ 满足 $\forall x \in X$，都有 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ，若存在一个非负可积函数 $g: X \to [0, \infty)$，使得对于每个 $n \geq 0$ 和任意 $x \in X$ 都有 $|f_n(x)| \leq g(x)$。那么，首先 f 和每个 f_n 都是可积的，以及我们可以交换积分和极限的顺序:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\ \mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n\ \mathrm{d}\mu = \int_X f\ \mathrm{d}\mu$$

不同的是，单调收敛定理关注的是逐点递增或递减的非负可测函数序列，而勒贝格控制收敛定理需要更强的逐点收敛的函数序列。单调收敛定理更为简单，只需要考虑函数序列的单调性和极限存在性；而勒贝格控制收敛定理则更为一般化，需要引入一个可积函数来控制函数序列的绝对值，可以处理更广泛的函数序列。

> 为了处理更广泛类别的函数，并保证积分的良好性质，我们一般会分类来定义勒贝格积分。下述定义统一给定测度空间 $(X, \mathcal{M}, \mu)$

示性函数的线性组合

示性函数（Indicator function）是一种在给定集合上的取值反映了元素是否属于该集合的函数。

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A, \\ 0 & \text{if } x \notin A. \end{cases}$$

很多文献会将示性函数的有限线性组合归为一类勒贝格积分的定义，称为“简单函数”。考虑非负实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，X 中可测集 $E_1, E_2, \ldots, E_n$ 和各 E_i 的指示函数 χ_{E_i}，定义非负简单函数为：

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$$

其勒贝格积分定义为：

$$\int_X \phi \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i)$$

此处会约定 $0 \cdot \infty = 0$，即当一个集合的测度为无穷时，无论积分的函数取什么值，其积分值都为零。

值得注意的是，此处积分的值并不依赖于将简单函数表示为示性函数的线性组合的方式，意思就是这个积分值是唯一确定的，它不依赖于我们对系数和可测集的选择。

简单勒贝格积分看作是测度的有限可加性概念的一种推广，顺便我们可以从此角度来回顾一下有限测度的可加性。对于一组不相交的可测集 $E_1, E_2, \ldots, E_n$ 的并集，具备有限可加性：

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)$$

一个简单函数定义为 $\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$，根据勒贝格积分的性质我们有：

$$\int_X \phi \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i)$$

简单勒贝格积分实际上是对于集合的测度与权重的乘积进行加权求和的过程，将测度的可加性概念推广到了更一般的情况下。

非负可测函数

为了处理更广义的函数，我们要进一步将定义推广到 $\overline{\mathbb{R}}$ 的非负部分上，即非负可测函数。有了前面的基础，这是很简单的。

对于非负可测函数 $f : X \to [0, \infty]$，如下定义的勒贝格积分有时也被称为下积分，所以会加个下标线：

$$\underline{\int_X} f \, \mathrm{d}\mu = \sup \left\{ \int_X \phi \, \mathrm{d}\mu : \phi \text{ is simple function}, 0 \leq \phi \leq f \right\}$$

或者可以定义为上积分：

$$\overline{\int_X} f \, \mathrm{d}\mu = \inf \left\{ \int_X \phi \, \mathrm{d}\mu : \phi \text{ is simple function}, 0 \leq f \leq \phi \right\}$$

尽管表示方式不同，这两个定义是等价的。并且，显然对于任何简单函数 ϕ，其本身的积分即为：

$$\int_X \phi \, \mathrm{d}\mu = \underline{\int_X} \phi \, \mathrm{d}\mu = \overline{\int_X} \phi \, \mathrm{d}\mu$$

逐项积分定理

积分与求和运算可交换。考虑一列非负可测函数 $\{f_n\}$，则有：

$$\int_X \sum_{k=1}^{\infty} f_k \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k \, \mathrm{d}\mu$$

证明起来很简单，~~我在今天语文课时偷偷证了~~，随手放点：

证明

给定测度空间 $(X, \mathcal{M}, \mu)$，一列非负可测函数 $\{f_n\}$，定义 $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ 是 X 上的非负可测函数，单调递增并收敛至 f。考虑当 n 趋近于 ∞ 时：

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$$

对 S 应用单调收敛定理与线性性质：

$$\int_X \lim_{n\to\infty} S_n \ = \int_X \sum_{k=1}^{\infty} f_k \ \mathrm{d}\mu$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_X S_n = \lim_{n\to\infty} \int_X \sum_{k=1}^{n} f_k \ \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_X f_k \ \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k \ \mathrm{d}\mu$$

$$\int_X \sum_{k=1}^{\infty} f_k \ \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k \ \mathrm{d}\mu$$

切比雪夫不等式

切比雪夫不等式（Chebyshev's Inequality），在这里我们可以使用测度论来描述它，考虑可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 和可测的广义非负实值函数 $f : E \to [0, \infty]$，则对于任意正实数 λ 都有：

$$\mu(\{f > \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} \int_E f \ \mathrm{d}x$$

其实在我看来的切比雪夫不等式，更多都是被用于概率论的研究（只是经常用测度论来表述）。在概率论中，它描述了一个随机变量与其期望值的偏离程度，明随机变量与其期望值之间的偏离程度受到其方差的控制。

任意可测函数

进一步地，对于 X 上的任意可测函数 f，其勒贝格积分定义为：

$$\int_X f\ \mathrm{d}\mu = \int_X f^-\ \mathrm{d}\mu - \int_X f^+\ \mathrm{d}\mu$$

法图引理

在一场考试中，分别在每个科目挑最差的人的分数来算总分，不会比总分倒数第一高。同理地，考虑非负可测函数序列的积分时，其下极限的积分至少不会比积分的极限下极限小。法图引理（Fatou's lemma）很重要的原因是它被用来证明勒贝格控制收敛定理。

考虑一列实值的非负可测函数 $\{f_n\}$ ，那么以下不等式恒成立：

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\ \mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\ \mathrm{d}\mu$$

法图定理证明起来非常简单，用 **单调收敛定理** 即可。

给定测度空间 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 考虑一列定义在 X 上的可测函数 $\{f_n\}$ ，令 $g_k = \inf_{n\ge k} f_n$，g_k 是有限个可测函数的下确界，且 $\liminf_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} g_n$。

根据单调定理，我们知道：

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\ \mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n\ \mathrm{d}\mu = \int_X f\ \mathrm{d}\mu$$

带进去得到：

$$\begin{aligned}
\int_X \liminf_{n\to\infty} f\ \mathrm{d}\mu &= \int_X \lim_{n\to\infty} g_n\ \mathrm{d}\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X g_n\ \mathrm{d}\mu \\
&= \liminf_{n\to\infty} \int_X g_n\ \mathrm{d}\mu \\
&\le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\ \mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

法图引理不仅对取正值的函数列成立，在一定限制条件下，同样可以适用于不论正负的 $\overline{\mathbb{R}}$ 。当函数的值域为 $\overline{\mathbb{R}}$ 时，若存在一个可积的正值函数 g 使得 $\forall n$ 都有 $g \leq f_n$，则上式也成立。

若对于几乎处处的 $x \in X$ 存在一个函数 f $\lim_{n\to\infty} f_n = f$，那么有：

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu$$

反常积分

反常积分，要说的话是对一类积分的归类（而不限于例如黎曼积分、勒贝格积分的定义）。一类是指积分区间的上限或下限无穷的积分，一类是指被积函数中积分区间存在不连续点的积分，区分的情况下，我们分别称为**无穷积分**和**异常积分**。

这里给出一个很典型的积分：

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

有基础的读者知道这个积分，甚至经常见到它，没基础的现在也知道了。当你尝试靠直觉把这个东西表示为 $\int_{[0,\infty)} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$ 时，上式就不成立。我们知道，最一般的情况，勒贝格积分的定义是由函数的正部和负部的差定义的，而这里的被积函数 $\frac{\sin x}{x}$ 的正部和负部在趋向无穷时振荡，使得它们收敛但会发散到无穷，因此我们无法以这种方式来定义这样的函数的积分。因此我们说， $\frac{\sin x}{x}$ 在 $[0, \infty)$ 的正部和负部分别都没有有限的积分值。然而，当函数的正部和负部都是无限的时候，它们的差在极限意义下，就未必是无限值，也是勒贝格可积的。

其实对于反常积分的讨论会让我们回归到一个很本质的问题，就是“黎曼可积的函数，是否一定勒贝格可积？” 而结论就是，未必，从此也能呼应上一开始在“测度与积分”那里提到的，勒贝格积分不能被说成是黎曼积分的推广。

Next

介绍实变函数论最基础的部分，应该就到此结束了，数学分析-实分析的主线文章应该之后会向抽象

空间的内容写。这个系列的内容一般是基础中的基础，给初学者过概念混眼熟的感觉，所以可能在这方面的内容，我会考虑写专门针对某方面进阶的东西（但至少它不会属于 "实分析导读" 系列）。

> 我猜可能在我极不稳定的精神状态和时间安排下，文章有大量的概念/常用性质是缺失的。因此希望对任何概念/性质/证明有疑问的读者 以我提供的任何方式联系我（邮件/留言/私信），我会直接回复或者根据必要性和实用性采纳部分内容，抽空为此专门写补充文章。

参考 & 引用资料

1. Cornell University. *The Lebesgue Integral*
2. Brent Nelson. *The Lebesgue Integral*
3. Trinity College Dublin. *Chapter 4. The dominated convergence theorem and applications*
4. JACOB STUMP. *INTRODUCTION TO THE LEBESGUE INTEGRAL*
5. George Stepanians. *The Lebesgue Integral, Chebyshev’s Inequality, and the Weierstrass Approximation Theorem*
6. University of Washington Math Department. *Fubini's theorem*
7. 广州市第x中学不知道谁丢的 *陈天权《数学分析讲义 第一册》*。它掉在地上了，没有写名字所以我帮你放在旁边的花坛了。抱歉，我很冒昧地擅自翻看了 另外我记得你在 *P105 习题2* 的证明是错的，但是我没帮你改。

Ouyang Anqiao 04:02 24/03/2024

gzanqiao@hotmail.com