

## **Derivation**

找到这里了啊...

## 最小二乘法

首先定义残差  $\epsilon$ ,以及前文定义的方程组  $b=Ax+\epsilon$ 

$$\varepsilon = \hat{b} - \hat{b}$$

根据  $b=Ax+\varepsilon$  的变形,我们可以得到  $\varepsilon=b-Ax$ ,所以就是  $\varepsilon=b-\hat{b}=b-Ax$ 。 现在我们需要得到残差平方和公式,一般情况我们默认把  $\varepsilon$  视为列向量,所以我们需要将向量  $\varepsilon$  先转置为行向量,也就是这样得出残差平方和 S 的等式。在转置后, $\varepsilon^{\top}$  是  $1\times n$  的行向量,而没转置的  $\varepsilon$  是  $n\times 1$  的列向量。

$$arepsilon = egin{bmatrix} arepsilon_1 \ arepsilon_2 \ ... \ arepsilon_n \end{bmatrix} \quad arepsilon^ op = egin{bmatrix} arepsilon_1, arepsilon_2, ..., arepsilon_n \end{bmatrix}$$

$$S = arepsilon^ op arepsilon$$

将  $\varepsilon = b - Ax$  代入 S, 我们得到如下式子, 并对其展开:

$$S = (b - Ax)^{ op}(b - Ax) \ = (b^{ op} - (x^{ op}A^{ op}))(b - Ax) \ = b^{ op}b - 2x^{ op}A^{ op}b + x^{ op}A^{ op}Ax$$

我们要对上公式中的 x 求导,将导数置为0,记为  $\dfrac{dS}{dx}=0$ ,由于第一项  $b^{\top}b$  是常数向量,所以求导为0,我们有

$$egin{aligned} rac{dS}{dx} &= b^ op b - 2x^ op A^ op b + x^ op A^ op Ax \ &= 0 - 2x^ op A^ op b + x^ op A^ op Ax \end{aligned}$$

进行移项和推导,得到

$$-2A^{ op}b + 2A^{ op}Ax = 0$$
  $2A^{ op}Ax = 2A^{ op}b$   $A^{ op}Ax = A^{ op}b$   $x = (A^{ op}A)^{-1}A^{ op}b$